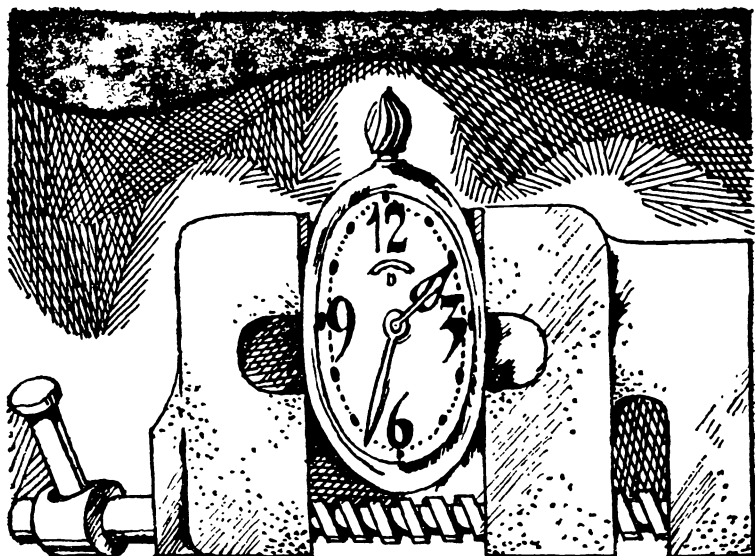


Народный университет  
Естественнонаучного факультета  
Издается с 1961 года



# ЧИСЛО И МЫСЛЬ

выпуск **10**

Издательство "ЗНАНИЕ" Москва 1987

ББК 22.1  
Ч 67

Рецензент: С. Н. Ш и м а н о в — доктор физико-математических наук, профессор.

Ч67 **Число и мысль. Сборник. Вып. 10.**— М.: Знание,  
1987.— 128 с.— (Народный университет. Естествен-  
веннонаучный фак.)  
40 к. 32 000 экз.

В сборнике рассматриваются проблемы математического моделирования в различных прикладных областях: технике, экономике и естественных науках, медицине.

Он может служить пособием для слушателей и преподавателей народных университетов естественнонаучных знаний, для специалистов в области математического моделирования.

Ч  $\frac{1502000000-040}{073(02)-87}$  14—87

ББК 22.1

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Основными направлениями экономического и социального развития СССР на 1986—1990 годы и на период до 2000 года предусматривается увеличить объем производства вычислительной техники в 2—2,3 раза; высокими темпами обеспечивать масштабы применения современных высокопроизводительных электронно-вычислительных машин всех классов; повысить эффективность работы вычислительных центров коллективного пользования.

Одним из условий такого широкого внедрения средств вычислительной техники во всех областях деятельности человека является повышение математических знаний специалистов, прежде всего в области математического моделирования и управления различными объектами, процессами, явлениями.

От уровня математической культуры специалистов, их умения использовать имеющиеся и строить новые математические модели, численные методы, алгоритмы и программы с учетом достижений современной математики во многом зависит эффективность использования электронно-вычислительной техники.

Настоящий сборник представлен рядом статей, объединенных сквозной темой: управление сложными техническими, экономическими и природными системами на базе математического моделирования и использования ЭВМ. В доступной форме обсуждаются вопросы моделирования в различных прикладных областях: технике, экономике и естественных науках; вопросы вычислительной эффективности, организации счета в режиме реального времени. Основное внимание уделяется рассмотрению различных аспектов моделирования управляемых систем и объектов, характеризующихся наличием силовых и информационных помех, противоречивостью, плохой формализуе-

мостью, многомерностью и др. Что касается типов обсуждаемых моделей, то они разные: это дифференциальные уравнения, математическое программирование, распознавание образов, приближение функций.

В статье Ю. С. Осипова обсуждается круг вычислительных динамических задач, т. е. таких задач, процесс решения которых (на ЭВМ), во-первых, стеснен жесткими временными ограничениями и, во-вторых, поставлен в условия неполной и меняющейся информации об исходных данных. Подобные задачи возникают, например, в той часто встречающейся на практике ситуации, когда вычисления требуется вести синхронно с некоторым реальным динамическим процессом — так, чтобы к моменту его окончания получить и окончательное решение задачи. При этом текущая информация о данных задачи может зависеть от развития процесса и, как сам процесс, не поддаваться точному прогнозированию. Обсуждается подход к построению алгоритмов решения таких задач, использующий идеи теории позиционного управления.

Противоречивым моделям оптимизации посвящена статья И. И. Еремина.

В моделях оптимизации, в частности в моделях линейного программирования, ограничения содержательно распадаются на ресурсные, технологические, директивные и ограничения среды (например, экологические). Во взаимодействии эти группы ограничений могут войти в противоречие, т. е. породить противоречивую систему ограничений. Такие объекты возникают при моделировании технико-экономических ситуаций, поэтому появляется необходимость создания математического аппарата анализа таких моделей. В статье рассказывается о противоречивых моделях, методах их коррекции (т. е. построении компромиссных моделей), рассматриваются конкретные ситуации, порождающие противоречивые модели экономики. Теория и методы для противоречивых моделей являются актуальными в рамках применения математических методов в моделировании и управлении сложными системами.

В противоречивых моделях требуются обобщения понятий допустимого и оптимального решений.

В статье В. Д. Мазурова рассмотрен круг вопросов математического моделирования, связанный с одним из активно применяемых в распознавании образов обобщений понятия решения, а именно понятия комитета (комитетом системы неравенств называется такое конечное множество

элементов, где каждому неравенству удовлетворяет более половины элементов этого множества). Проблема распознавания образов состоит в выработке понятия о классе объектов, сходных друг с другом в каком-либо отношении, и в выработке (на основе прецедентов) правила классификации этих объектов. Математические модели, отражающие содержание данной задачи, как правило, противоречивы. Поэтому часто приходится строить не одно решающее правило классификации, а комитет решающих правил. Методы нахождения комитета решающих правил классификации позволили решить многие теоретические и практические задачи распознавания образов. Из нетривиальных применений этого аппарата указывается на применение распознавания образов в качестве блока настройки вычислительных алгоритмов, их адаптации к реальным условиям вычислительного процесса. Вообще выясняется (и подтверждается практикой), что методы распознавания образов являются мощным средством решения плохо формализуемых задач перечисленных выше разновидностей.

А. Ф. Сидоров в своей статье обсуждает вопросы математического эксперимента. Очень широкий круг физических процессов и явлений, возникающих в разнообразных сплошных средах (жидких, газообразных и т. д.), использует в качестве математической модели нелинейные дифференциальные уравнения с частными производными. Задачи о нахождении решений таких уравнений, которые возникают при проектировании различных машин и устройств, часто с большим трудом поддаются решению даже с помощью современных ЭВМ. В статье автором рассматриваются вопросы об оптимальной стратегии решения сложных многомерных нелинейных задач математической физики на ЭВМ. Оценивается роль аналитических методов в прикладной математике, описываются основные математические методы, используемые для анализа нелинейных задач механики сплошной среды. Обосновывается целесообразность развития комбинированной стратегии получения решений, основанной на сочетании как чисто вычислительных методов, так и применения некоторых аналитических конструкций и результатов качественных и количественных аналитических исследований для повышения эффективности алгоритмов расчета.

Рассматривается связанный с этим вопрос о теоретической подготовке математика-вычислителя, которая необходима для успешной и эффективной работы в области

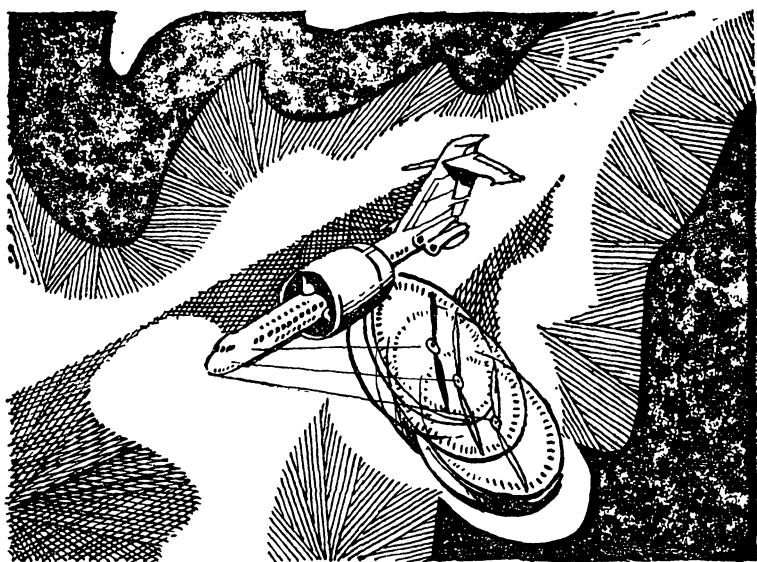
решения современных задач инженерно-физического плана.

Различные прикладные вопросы теории приближения функций рассматриваются в статье Ю. Н. Субботина.

Теория приближения функций—разветвленный раздел современной математики с широким кругом экстремальных задач, связанных с приближением функций и классов функций, функционалов и операторов, в частности при информации, известной с погрешностью. Ее методы широко проникают в другие разделы математики и используются при разработке численных методов решения различных прикладных задач, таких, как обработка и экономное хранение больших массивов информации, обработка экспериментальных данных при информации, известной с погрешностью, представление кривых и поверхностей для станков с числовым программным управлением, машинная графика, числовая обработка снимков и т. д.

Основы теории приближения функций (теория наилучших равномерных приближений) были заложены великим русским математиком П. Л. Чебышевым. Предпосылкой для ее развития послужило исследование П. Л. Чебышевым одной прикладной задачи, связанной с оптимальными режимами работы паровой машины. В статье в популярной форме рассказывается о некоторых современных исследованиях в теории наилучшего приближения функций, а также об использовании ее методов при решении оптимальных прикладных задач, например задач строительной механики и техники.

Содержание сборника интересно тем, что за материалом каждой статьи стоит не просто сумма знаний о той или иной прикладной области математики, но и опыт решения многочисленных трудных задач, возникающих в различных областях: технике, экономике, медицине и т. д.



Ю. С. Осипов,  
член-корреспондент АН СССР

## ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ

В инженерном деле и научных исследованиях хорошо известны задачи о восстановлении неизвестных характеристик изучаемых объектов и явлений по доступной информации.

Многие из этих задач по своей постановке и алгоритмам решения являются статическими. В таких задачах данные для расчета априори известны, алгоритмы восстановления не учитывают возможное изменение этих данных в процессе счета, сам процесс счета не является, вообще говоря, разовым, и его можно повторять. Примерами здесь служат многие обратные задачи математической физики, приближения функций, вычислительной математики, задачи программного управления и наблюдения и др.

Однако в последнее время в некоторых инженерных и научных разработках возникает необходимость осуществлять восстановление неизвестных характеристик интере-

сующих нас явлений в динамике — синхронно с развитием этих явлений, или, как говорят инженеры, в реальном времени. При этом информация о данных для расчета может меняться — «плыть» во времени — и зависеть в настоящем от того, как проводилось восстановление интересующих нас характеристик в прошлом. С подобными задачами приходится сталкиваться в механике управляемого полета, при создании технологических и производственных процессов, в проблемах оперативной обработки информации и т. п.

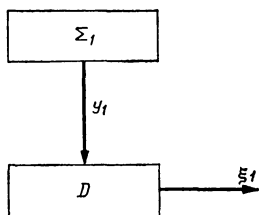
Цель данной статьи — на отдельных избранных примерах познакомить читателя с одним классом задач динамического восстановления, объединенных общим подходом к их решению. Многие из этих задач можно трактовать как задачи о восстановлении неизвестных характеристик движения динамической системы в темпе реального времени на основании поступающих в процессе движения данных о системе.

В общем виде проблема может быть описана следующим образом. Имеется некоторая система (объект) — назовем ее  $\Sigma_1$ . Время функционирования системы задано — это конечный промежуток  $T = [t_0, \theta]$ . Требуется построить алгоритм, восстанавливающий в темпе реального времени интересующую нас характеристику движения  $\xi_1$ :  $\xi_1$  может быть траекторией системы, реализацией скорости, реализацией действующих на систему сил;  $\xi_1$  может быть конечным состоянием системы, некоторым ее параметром, запаздыванием в фазовых координатах или каналах управления и т. п. Данные о системе  $\Sigma_1$  несет переменная  $y_1$ , причем значения этой переменной в настоящем могут зависеть от того, как велось восстановление характеристики  $\xi_1$  в прошлом.

Подобного рода задачи для динамических систем изучались в различных постановках в теории управления, в теории дифференциальных игр, теории оценивания и идентификации (см., например, [1, 2, 9, 10]). Те постановки, о которых пойдет речь, а также методы решения задач с идейной точки зрения примыкают к теории позиционных дифференциальных игр, развитой Н. Н. Красовским и его школой [1, 2]. Подробнее можно познакомиться с этими постановками в работах [3—6]. Здесь же мы лишь поясним содержательно их характерные моменты.

Во-первых, искомые алгоритмы — с расчетом на возможность их практической реализации — строятся в классе





*D* - работает в реальном времени

*D* - конечно-шаговый

*D* - регуляризирующий

Рис. 1

конечно-шаговых алгоритмов, т. е. таких алгоритмов, которые учитывают поступающую текущую информацию о системе (переменную  $y_1$ ) лишь в конечном числе временных узлов промежутка  $T$ , обрабатывая ее между узлами. Важным неформальным требованием к алгоритмам является требование простоты. Желательно, чтобы они задавались явными конечномерными формулами.

Во-вторых, «входная» информация принимается неидеальной — переменная  $y_1$  несет данные о системе, быть может, с некоторой помехой. Это, а также дополнительное огрубление информации, возникающее из-за конечно-шаговости алгоритма, неизбежно влечет неточности в вычислении  $\xi_1$ . Требование, предъявляемое к алгоритму, состоит в том, чтобы при малой погрешности в поступающих данных о системе и достаточно малом расстоянии между временными узлами промежутка  $T$  погрешность восстановления искомой характеристики  $\xi_1$  была мала. Имея в виду терминологию теории некорректных задач [7, 8], будем называть такие алгоритмы **регуляризирующими**.

Итак, речь идет о построении конечно-шаговых регуляризирующих алгоритмов восстановления характеристик динамических систем. Будем обозначать такие алгоритмы буквой  $D$  (рис. 1). Сам процесс восстановления характеристик будем называть моделированием этих характеристик.

Поясним прежде всего на простых иллюстрирующих примерах некоторые из рассматриваемого круга задач.

**Пример 1** (о моделировании движения). Самоходная тележка движется по местности под действием силы тяги  $v = v[t]$ ,  $t \in T = [t_0, \theta]$ . Эта сила не известна. По ходу движения в отдельные моменты времени поступают при-

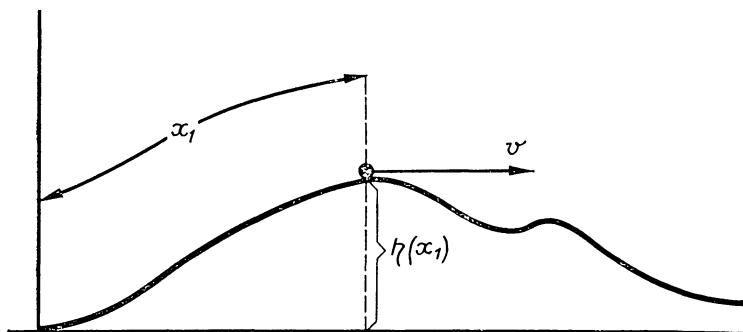


Рис. 2

ближенные данные о расходе горючего. Рельеф местности известен приближенно. Требуется по ходу движения приближенно восстанавливать проходимый тележкой путь и ее скорость.

Рассмотрим простейшую модель этой ситуации. Примем тележку за материальную точку, считая, что движение ее происходит в вертикальной плоскости по гладкой кривой под действием силы  $v$ , направленной по касательной к этой кривой (рис. 2).

Уравнения движения тележки можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\beta \eta'(x_1) + v[t].\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь  $x_1$  — криволинейная координата, определяющая положение точки;  $x_2$  — скорость изменения координаты;  $\eta(x_1)$  — функция профиля рельефа;  $\dot{x}_1$ ,  $\dot{x}_2$  — скорости изменения координат по времени (производные  $x_1$ ,  $x_2$  по  $t \in T$ );  $\eta'(x_1)$  — производная функции  $\eta(x_1)$  по  $x_1$ ;  $\beta$  — постоянный коэффициент. Примем также, что  $v \geq 0$  и упомянутый расход топлива к моменту  $t$  есть интеграл

$$z(t) = \int_{t_0}^t v[\tau] d\tau, \quad (2)$$

причем этот расход оценивается в процессе движения величиной  $y_1[t]$ , сообщаемой в отдельные моменты времени  $t_i$  временного промежутка  $T$  ( $t_0 < t_1 < \dots < t_m = \theta$ ). Оценка имеет погрешность  $h_1$  ( $h_1 = \text{const} \geq 0$ ):

$$|y_1[t_i] - z[t_i]| \leq h_1. \quad (3)$$

$\Delta$ :

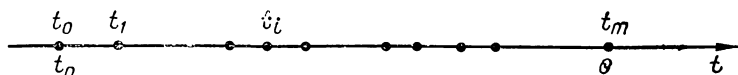


Рис. 3

Наконец, считаем, что функция профиля рельефа  $\eta(x_1)$  оценивается равномерно с погрешностью  $h_2$  известной функцией (быть может, разрывной)  $\eta^*(x_1)$ :

$$|\eta^*(x_1) - \eta(x_1)| \leq h_2. \quad (4)$$

Нам требуется синхронно с движением тележки восстанавливать приближенно проходимый тележкой путь и скорость, т. е. величину

$$\xi_1 = \xi_1[t] = \{x_{1t}, x_{2t}\}, \quad (5)$$

где

$$x_{it} = \{x_i[\tau], \quad t_0 \leq \tau < t\}. \quad (6)$$

При этом правило восстановления — алгоритм  $D$  — должно обладать перечисленными свойствами, в частности, давать тем лучший результат, чем меньше  $h_1$  и  $h_2$  и чем больше  $m$ .

Итак, в этом примере система  $\Sigma_i$  математически задается уравнениями (1), информационная переменная  $y_1$  — соотношениями (3), (2), искомая величина  $\xi_1$  определена соотношениями (5), (6).

**Пример 2** (о моделировании скорости). На промежутке времени  $T = [t_0, \theta]$  наблюдается некоторый процесс  $\varphi = \varphi[t]$ ,  $\varphi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  — вектор. В каждый текущий момент  $t$  дальнейшее развитие процесса, вообще говоря, непредсказуемо. В узлах  $t_i$  временной сетки  $\Delta$  (рис. 3) измеряются приближенные значения  $\psi$  текущего значения величины  $\varphi$ :

$$|\psi[t_i] - \varphi[t_i]| \leq h, \quad h = \text{const}. \quad (7)$$

Здесь  $|\varphi|$  — какая-то норма вектора  $\varphi$ . Требуется указать алгоритм  $D$ , который, работая с измерениями  $\psi$ , «имеет на выходе» в каждый текущий момент  $t$  некоторое приближение

$$w_t = \{w[\tau], \quad t_0 \leq \tau < t\} \quad (8)$$

реализации скорости процесса

$$\dot{\varphi}_t = \{\dot{\varphi}[\tau], \quad t_0 \leq \tau < t\} \quad (9)$$

на всем прошлом временном промежутке — от  $t_0$  до  $t$  (рис. 4).

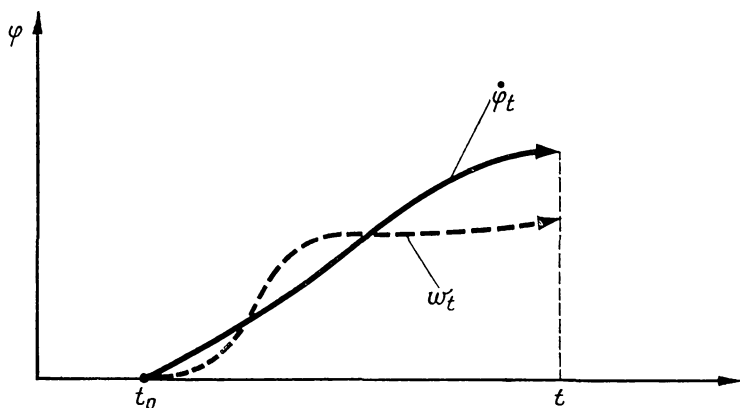


Рис. 4

Если, например,  $\varphi$  — положение или скорость движущегося объекта, то речь здесь идет об оценке в темпе реального времени соответственно скорости объекта или действующих на него перегрузок. Это, по существу, известная задача о численном дифференцировании неточно заданной функции. Особенность ее в том, что осуществлять это дифференцирование требуется в темпе реального времени — синхронно с развитием процесса  $\varphi = \varphi[t]$  на основании поступающих текущих данных  $\psi[t]$ .

**Пример 3** (о моделировании силы). Имеется механическая колебательная система, описываемая на промежутке  $T = [t_0, \theta]$  уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 - \beta_1 x_1^2 - v[t] \beta_2 x_1^3 + P_0 \cos(\omega t - \psi_0). \end{aligned} \quad (10)$$

Параметры  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $P_0$ ,  $\omega$  и  $\psi_0$  известны. Коэффициент  $v[t]$  упругой характеристики не известен. Требуется приближенно восстановить его, измеряя в процессе движения с погрешностью  $h$  положение системы  $x_1$  и ее скорость  $x_2$ . Таким образом, система  $\Sigma_1$  задается уравнениями (10), интересующая нас в текущий момент  $t$  характеристика  $\xi_1$  есть функция

$$\xi_1 = \xi_1[t] = \{v[\tau], t_0 \leq \tau < t\}, \quad (11)$$

и восстанавливать ее нужно в классе алгоритмов  $D$  на основании поступающих данных

$$y_1 = y_1[t] = \{y_{11}[t], y_{12}[t]\}, \quad (12)$$

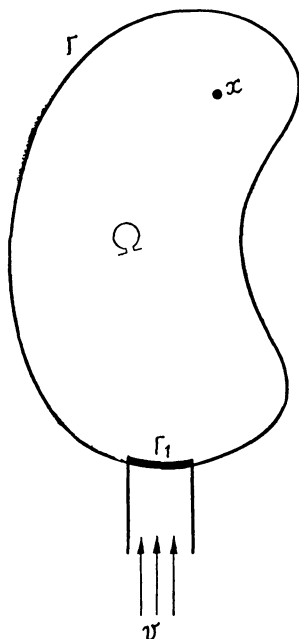


Рис. 5

где

$$|y_{11}[t] - x_1[t]| \leq h, |y_{12}[t] - x_2[t]| \leq h. \quad (13)$$

**Пример 4** (о моделировании помехи). Имеется тело  $\Omega$  с границей  $\Gamma$  (рис. 5). На промежутке времени  $T = [t_0, \theta]$  рассматривается процесс теплопроводности в теле. В отдельные текущие моменты времени  $t_i \in T$  измеряется с ошибкой  $h$  температура тела  $q[t_i, x]$ ,  $x \in \Omega$  ( $x = \{x_1, x_2, x_3\}$ ). Результат измерения есть величина  $q^*[t_i, x]$ ,  $x \in \Omega$ :

$$\int_{\Omega} (q^*[t_i, x] - q[t_i, x])^2 dx \leq h. \quad (14)$$

Требуется по ходу процесса контролировать (оценивать) тепловую помеху  $v = v[t]$ , возникающую на участке  $\Gamma_1$  границы  $\Gamma$ .

При известных предположениях процесс теплопроводности можно описать уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} &= Aq + f(t, x, q) \text{ на } T \times \Omega, \\ B_1 q &= \varphi \text{ на } T \times (\Gamma \setminus \Gamma_1), \\ B_2 q &= c(x)v[t] \text{ на } T \times \Gamma_1. \end{aligned} \quad (15)$$

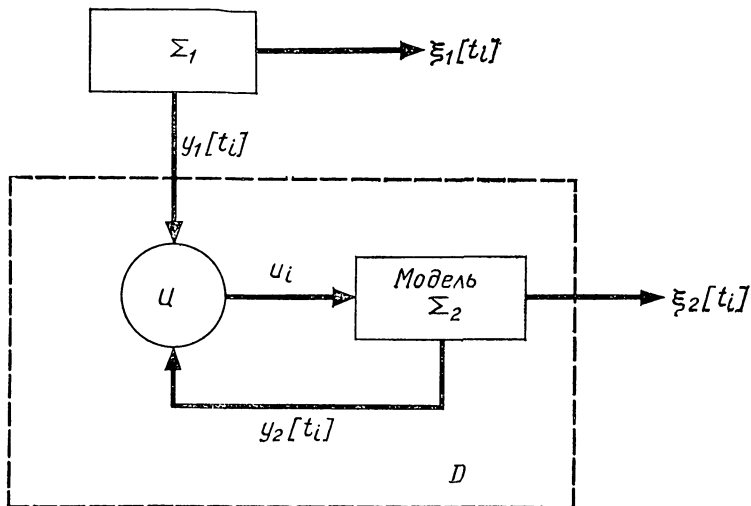


Рис. 6

Здесь  $A$  — эллиптический оператор;  $f$ ,  $\varphi$ ,  $c$  — известные функции;  $B_1$ ,  $B_2$  — операторы граничных условий. Таким образом, система  $\Sigma_1$  задается уравнениями (15), интересующая нас характеристика системы есть в каждый момент функция

$$\xi_1 = \xi_1[t] = \{v[\tau], t^0 \leq \tau < t\}, \quad (16)$$

и восстанавливать ее нужно в классе алгоритмов  $D$  на основании поступающих данных

$$y_1 = y_1[t] = \{q^*[t, x], x \in \Omega\}, \quad (17)$$

где  $q^*$  удовлетворяет (14).

Можно было бы привести другие примеры подобных задач восстановления.

В чем состоит подход к решению таких задач?

Обратимся к рис. 6. Исходной динамической системе  $\Sigma_1$  сопоставляется специальным образом конструируемая управляемая динамическая система-модель — назовем ее  $\Sigma_2$ . Управление последней осуществляется по принципу обратной связи в дискретной по времени схеме. Это означает, что на промежутке  $T = [t_0, \theta]$  выбирается сетка  $\Delta = \{t_i, i = 0, \dots, m\}$  (см. рис. 3) и закон управления  $U$  моделью в каждый момент  $t = t_i$  назначает на основании поступивших к этому моменту данных  $y_1[t_i]$  о системе  $\Sigma_1$  и по-

ступивших к этому моменту данных  $y_2[t_i]$  о системе  $\Sigma_2$  управляющее воздействие  $u_i$  на последующий промежуток времени  $[t_i, t_{i+1}]$ . Это воздействие в течение данного промежутка времени и подается на нашу модель  $\Sigma_2$ . Требуется сконструировать такой закон управления  $U$ , который обеспечивает нужную близость соответствующей характеристики  $\xi_2$  модели  $\Sigma_2$  (траектории, скорости движения, реализации действующей силы или помехи и т. п.) к интересующей нас характеристике  $\xi_1$  системы  $\Sigma_1$ .

Таким образом, здесь, по существу, идет речь о позиционном способе управления, известном в теории позиционных дифференциальных игр [1, 2] как способ управления с поводырем. Следуя терминологии этой теории, закон управления  $U$  моделью будем называть **стратегией**. По условиям рассматриваемых задач искомая стратегия  $U$  должна быть **регуляризирующей**: при достаточно малом шаге  $d$  временной сетки  $\Delta$  и достаточно малой погрешности  $h$  в информационной переменной  $y_1$  характеристики  $\xi_1$  и  $\xi_2$  должны быть сколько угодно близки (в нужном смысле).

Очевидно, исходную задачу о построении алгоритма  $D$  можно теперь понимать как задачу о построении регуляризирующей стратегии  $U$ . Подчеркнем, что модель  $\Sigma_2$  и закон управления  $U$  моделью—суть только мысленные математические конструкции, которые, впрочем, «физически реализуются» в ЭВМ.

Из каких же соображений строить модели  $\Sigma_2$  и законы управления  $U$ ? Разумеется, для исходной проблемы восстановления, описанной выше в весьма общей форме, ответ на эти вопросы дать вряд ли возможно. Однако для некоторых важных классов задач восстановления (которые, в частности, включают все приведенные выше примеры) можно наметить общий путь решения. Поясним его содержательно в нескольких словах.

Предположим, что удалось сконструировать модель  $\Sigma_2$  и на движениях модели **оценочный** функционал  $\Lambda$ , т. е. функционал **со свойством**: из малости его на том или ином движении  $\Sigma_2$  следует близость характеристики  $\xi_2$  этого движения к искомой характеристике  $\xi_1$  системы  $\Sigma_1$ . Предположим далее, что удалось построить стратегию  $U$  управления моделью со свойством: она **стабилизирует** функционал  $\Lambda$ , т. е. вдоль порождаемых этой стратегией движений функционал  $\Lambda$  принимает малые значения, если только малы шаг временной сетки и погрешность в данных

о системе. Ясно, что стратегия управления, стабилизирующая оценочный функционал, и есть искомая регулирующая стратегия  $U$ .

Именно на этом пути в некоторых ситуациях удастся построить процедуры восстановления характеристик систем. В качестве примеров таких ситуаций укажем две задачи восстановления, к которым сводятся многие другие.

**Задача 1** (задача о моделировании движения). Пусть поведение системы  $\Sigma_1$  описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in T = [t_0, \theta]. \quad (18)$$

Здесь  $x$  —  $n$ -мерный вектор состояний системы. Требуется указать алгоритм, который восстанавливает движение  $x = x(t)$  системы на промежутке времени  $T$ . Алгоритм должен, во-первых, восстанавливать движение синхронно с его развитием и, во-вторых, в каждый текущий момент  $t$  иметь на выходе некоторое равномерное по  $\tau$  приближение  $w_t = w_t[\cdot] = \{w[\tau], t_0 \leq \tau < t\}$  движения  $x$  на всем прошлом участке — от  $t_0$  до  $t$ ; этот отрезок движения будем обозначать  $x_t$ :

$$x_t = \{x[\tau], t_0 \leq \tau < t\}.$$

Особенность рассматриваемой задачи в том, что правая часть  $f$  уравнения (18) считается априори неизвестной: известен лишь некоторый класс функций, содержащий  $f$ . Дополнительная, более точная информация о функции  $f$  поступает по ходу движения. Не будем здесь конкретизировать природу этой текущей информации: примем, что на промежутке  $T$  априори выбрана некоторая временная сетка  $\Delta$  с равномерным шагом  $d$

$$t_0 < t_1 < \dots < t_m = \theta, \quad d = t_{i+1} - t_i$$

и текущей информации достаточно для того, чтобы в любой узловой момент  $t_i$  этой сетки на основе сформированного алгоритмом к этому моменту приближения  $w_{t_i}$  вычислить вектор  $y_1[t_i] = \{y_{11}[t], \dots, y_{1n}[t]\}$ , аппроксимирующий с некоторой малой погрешностью  $h$  величину  $z[t_i]$ :

$$|y_1[t_i] - z[t_i]| \leq h, \quad (19)$$

где

$$z[t_i] = z(t_i, w_{t_i}) = x_0 + \int_{t_0}^{t_i} f(t, w_{t_i}(t)) dt. \quad (20)$$



Примем также, что априорная (т. е. до момента  $t_0$ ) информация о системе такова. Во-первых, правая часть системы — функция  $f$  — измерима (в смысле Лебега) по переменной  $t$  и непрерывна по переменной  $x$ . Во-вторых, движение системы (понимаемое как решение уравнения (18) в смысле Каратеодори) единственно и лежит в пределах некоторого известного множества  $M$  в фазовом пространстве  $x(t) \in M$ ,  $t \in T$  (по смыслу множество  $M$  есть некоторая грубая априорная оценка для неизвестной траектории). В-третьих, значения функции  $f$  при  $t \in T$  и при всех  $x$  из некоторой  $\gamma$ -окрестности множества  $M$  ограничены конечным числом  $K$ :

$$\begin{aligned} |f(t, x)| &\leq K, \quad t \in T, \quad x \in M^\gamma, \\ |f| &= \max \{|f_1|, \dots, |f_n|\}, \\ M^\gamma &= \{x: \inf_x |x - q| \leq \gamma, \quad x \in M\}. \end{aligned}$$

Константы  $K$ ,  $\gamma$  считаем известными (если функция  $f$  является липшицевой по  $x$ , то эти константы легко оцениваются). Будем для простоты также считать, что начальное состояние  $x_0$  задано.

Итак, система  $\Sigma_1$  в данном случае описывается дифференциальным уравнением (18). Восстанавливаемая характеристика  $\xi_1$  в каждый момент  $t$  есть предыстория движения системы  $x_t$ . Восстанавливать ее требуется по данным  $y_1[t]$ , удовлетворяющим условиям (19), (20).

Оказывается, что в этой задаче в качестве модели  $\Sigma_2$  можно взять простейшую управляемую систему

$$\dot{w} = u, \quad w(t_0) = x_0, \quad t \in T = [t_0, \theta], \quad (21)$$

где состояние системы  $w = \{w_1, \dots, w_n\}$  и управление  $u = \{u_1, \dots, u_n\}$  — векторы той же размерности  $n$ , что и размерность вектора  $x$  состояния системы  $\Sigma_1$ . При этом управляющее воздействие  $u$  следует стеснить ограничением

$$|u| \leq K.$$

В каждый момент  $t$  характеристика  $\xi_2$  есть предыстория движения управляемой системы (21), реализовавшаяся к моменту  $t$ :

$$\xi_2 = \xi_2[t] = \{w[\tau], \quad t_0 \leq \tau < t\}.$$

Близость  $\xi_1$  и  $\xi_2$  в момент  $t$  оценивается величиной

$$\rho(\xi_1, \xi_2) = |x_t - w_t|_c = \max_{t_0 \leq \tau \leq t} |x[\tau] - w[\tau]|.$$

В качестве оценочного функционала  $\Lambda$  можно взять функционал, значение которого при каждом  $t$  есть (см. (21))

$$\Lambda = \Lambda(t, w_t) = \max_{t_0 \leq \tau \leq t} |w[\tau] - z[\tau]|.$$

В конечный момент времени  $t = \theta$  значение  $\Lambda$  есть величина невязки [7, 8] для интегрального эквивалента дифференциального уравнения (18). Ясно поэтому, что из малости этого значения  $\Lambda$  следует близость движений (характеристик  $\xi_1$  и  $\xi_2$ ) систем  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ .

Далее, оказывается, что стратегия

$$U(t, y_1, y_2) = U(t, w, y_2) = \{ -K \operatorname{sign}(w_1 - y_{11}), \dots, -K \operatorname{sign}(w_n - y_{1n}) \} \quad (22)$$

стабилизирует функционал  $\Lambda$ . Таким образом, стратегия  $U$  (22) является регуляризующей для задачи о моделировании движения.

Итак, согласно стратегии  $U$  (22) управление моделью осуществляется по следующей простой схеме. В  $i$ -м узловом моменте  $t_i$  эта стратегия назначает для модели постоянное на промежутке  $[t_i, t_{i+1}]$  управление  $u_i$  из правила: вычисляется разность  $s_i$  между вектором  $w[t_i]$  состояния модели в момент  $t_i$  и поступающим в этот момент информационным вектором  $y_1[t_i]$ , затем каждая  $j$ -я координата вектора  $u_i$  полагается равной константе  $K$  со знаком, противоположным знаку  $j$ -й координаты вектора  $s_i$ . Идея такого способа управления заложена в известном способе экстремального сдвига [1, 2]. Поэтому стратегию  $U$  (22) будем называть **экстремальной**. При некоторых предположениях точность такой стратегии удастся оценить явно [5]: экстремальная стратегия обеспечивает рассогласование между движениями систем  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  не более чем на величину вида  $c_1 d + c_2 h$ , где постоянные  $c_1$  и  $c_2$  явно выражаются через априорные данные.

Природа текущей информации в задаче 1 не конкретизировалась. Предполагалось лишь, что на основании этой информации можно в моменты  $t_i$  вычислять вектор  $y_1[t_i]$ , удовлетворяющий (19). В условиях такой ситуации мы, например, находимся, когда функция задается таблично. Еще простой пример:  $f(t, x) = \bar{f}(t, x, v(t))$ , где  $\bar{f}$  — известная функция, реализация параметра (помехи)  $v$  наперед непредсказуема, но в узлах  $t_i$  с некоторой погрешностью доступна измерению величина  $v(t_i)$ . В этом случае — при предположениях о гладкости реализации  $v$  — также вычис-

ляется в моменты  $t_i$  информационный вектор  $y_1[t_i]$ , удовлетворяющий (19).

К задаче 1 сводится и описанная выше в примере 2 задача о моделировании скорости. В самом деле, предположим для простоты, что  $\varphi$  — скаляр,  $\varphi(t_0) = \dot{\varphi}(t_0) = 0$  и априори известно, что скорость процесса удовлетворяет условию Липшица с константой  $\lambda$ :

$$|\varphi(t + \delta) - \varphi(t)| \leq \lambda \delta.$$

Рассмотрим динамическую систему  $\Sigma_1$ , описываемую уравнением

$$\dot{x} = \frac{1}{\omega} (\dot{\varphi}(t) - x), \quad x(t_0) = 0, \quad t \in T = [t_0, \theta]. \quad (23)$$

Здесь  $x$  — скаляр,  $\omega$  — некоторое положительное число. Систему (23) называют иногда аperiodическим звеном. Известно, что

$$\max_{t_0 \leq t \leq \theta} |x(t) - \dot{\varphi}(t)| \leq \omega.$$

Поэтому задачу о моделировании скорости  $\dot{\varphi}(t)$  при малом  $\omega$  можно заменить задачей 1 о моделировании движения системы (23). Информационная переменная  $y_1$  в момент  $t_i$  здесь равна (см. (7))

$$y_1[t_i] = \frac{1}{\omega} (\psi[t_i] - J(t_i)),$$

где

$$J(t_i) = \int_{t_0}^{t_i} \omega[t] dt.$$

Напомним, что в задаче 1  $\omega$  — состояние модели  $\Sigma_2$  (21); в данном случае  $\omega$  — скаляр. Вычисляется теперь эта информационная переменная с погрешностью  $\bar{h} = h/\omega$ :

$$|y_1[t_i] - z[t_i]| \leq \bar{h} = h/\omega.$$

Управление  $u_i$  моделью на промежутке  $[t_i, t_{i+1}]$  согласно (22) принимает теперь вид:

$$u_i = -(\lambda + 1) \operatorname{sign}[\omega \psi[\tau_i] - \psi[\tau_i] + J(t_i)].$$

Заметим, что величины  $J(t_i)$  можно вычислять рекуррентно:

$$J(t_0) = 0, \quad J(t_i) = J(t_{i-1}) + \omega[t_{i-1}] d + u_{i-1} \frac{d^2}{2}.$$

Если шаг  $d$  временной сетки  $\Delta$  и параметр  $\omega$  выбрать из условий

$$d = c_1 \sqrt{h}, \quad \omega = c_2 \sqrt{h}$$

и должным образом согласовать  $c_1$  и  $c_2$ , например, положив их равными

$$c_1 = 9/(6c + 4), \quad c_2 = 3,$$

то движение модели (21) (при  $n = 1$ ), будет равномерно аппроксимировать скорость  $\dot{\varphi}(t)$  с погрешностью  $(2 + 3\lambda) \sqrt{h}$ :

$$\max_{t_0 \leq t \leq \theta} |\omega[t] - \dot{\varphi}[t]| \leq (2 + 3\lambda) \sqrt{h}.$$

Эта оценка оптимальна по порядку [7]. Отметим, что в нашем алгоритме восстановления нет операции взятия разностного отношения, которая, как правило, присутствует в алгоритмах аппроксимации производной [7, 8]. Это обстоятельство может оказаться удобным в практических расчетах.

Можно привести также другие содержательные задачи восстановления, сводящиеся к задаче 1. Мы на них останавливаться не будем, отсылая читателя к [3, 5]. Отметим только, что задача о моделировании движения самоходной тележки из примера 1 также сводится к задаче 1 (см. [5], где, в частности, для этого примера приведены результаты моделирования на ЭВМ) путем построения соответствующего  $y_1$  по данным (2).

**Задача 2** (о моделировании сил—обратная задача динамики). Пусть имеется некоторая динамическая система, начинающая в начальный момент движение из заданного состояния под действием некоторой силы. Нас интересует реализация силы во времени, порождающая это движение. Реализация должна восстанавливаться по ходу движения—в темпе реального времени на основании информации о текущих фазовых состояниях системы, измеряемых с некоторыми ошибками.

Уточним постановку задачи. Примем, что поведение системы описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, v[t]), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in T = [t_0, \theta]. \quad (24)$$

Здесь  $x$ — $n$ -мерный вектор состояния системы,  $v$ — $r$ -мерный вектор действующих на систему сил. Непрерывная функция

$f(t, x, v)$  предполагается известной. Известно также, что сила  $v$  стеснена ограничением

$$v \in P, \quad (25)$$

где  $P$  — заданное ограниченное множество. Истинная реализация  $v$  — измеримая по Лебегу функция  $v = v[t]$ ,  $t \in T$  со значениями во множестве  $P$  — неизвестна. Она и подлежит приближенному восстановлению синхронно с движением системы на основании поступающих замеров с ошибкой  $h$  фазовых состояний системы.

Итак, система  $\Sigma_1$  в данном случае описывается уравнением (24). Данные о системе несет переменная  $y_1[t]$ , удовлетворяющая условию

$$|y_1[t] - x[t]| \leq h, \\ \left( |x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} \right).$$

На основании этих данных по ходу движения требуется восстанавливать приближенно в среднеквадратичном характеристику системы

$$\xi_1 = \xi_t = \{v[\tau], t_0 \leq \tau < t\}.$$

Сказанное здесь требует уточнения. Дело в том, что реализующееся на самом деле движение  $x[t]$  системы  $\Sigma_1$  могло бы, вообще говоря, возникнуть не только под действием реально действующей силы  $v = v[t]$ , но и под действием каких-либо других сил  $v = v(t)$ , удовлетворяющих заданному ограничению (25). На языке дифференциального уравнения (24) это означает, что, вообще говоря, существует не одна измеримая по Лебегу функция  $v(t)$ ,  $t \in T$  со значениями во множестве  $P$ , для которой решение в смысле Караатеодори задачи Коши (24) при  $v = v(t)$  есть функция  $x[t]$ ,  $t \in T$ . Пусть  $V_0$  — совокупность всех таких функций  $v(t)$ ,  $t \in T$ . В этом множестве содержится и функция  $v[t]$ ,  $t \in T$ . Теперь задачу о восстановлении реализации  $v[t]$ ,  $t \in T$  будем понимать как задачу о приближенном восстановлении (в среднеквадратичном) хотя бы какой-нибудь функции из  $V_0$ . Если мы решим эту задачу и  $V_0$  одноэлементно, то, конечно, приближенно восстановим реализацию истинной силы.

Обсудим теперь решение этой задачи, следуя изложенным выше общим соображениям. Будем для простоты считать, что множество  $P$  выпуклое и функция  $f = f(t, x, v)$  в правой части уравнения (24) имеет следующую структуру:

$$f(t, x, v) = f_0(t, x) + f_1(t, x)v.$$

Предположим также, что движение  $x[t]$ ,  $t \in T$  заведомо содержится в ограниченном замкнутом множестве  $M$  фазового пространства:  $x[t] \in M$ ,  $t \in T$ , причем известна константа  $K$  такая, что  $|\dot{f}(t, x, v)| \leq K$ ,  $t \in T$ ,  $x \in M$ ,  $v \in P$ . Как и выше,  $M$  имеет смысл некоторой грубой априорной оценки для наблюдаемого движения.

Зададим на промежутке  $T = [t_0, \theta]$  временную сетку  $\Delta$  (см. рис. 3) и сопоставим системе  $\Sigma_1$  в качестве модели  $\Sigma_2$  управляемую систему, описываемую на каждом временном промежутке  $[t_i, t_{i+1}]$  дифференциальным уравнением:

$$\begin{aligned} \dot{w} &= f_0(t_i, y_1[t_i]) + f_1(t_i, y_1[t_i]u), \\ w[t_0] &= x_0; \quad t_i \leq t < t_{i+1}, \quad i = 0, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (26)$$

Управление  $u$  стесним при этом ограничением  $u \in P$ .

В системе  $\Sigma_2$  будем допускать любые кусочно-постоянные на сетке  $\Delta$  реализации  $u = u[t]$ ,  $t \in T$  управления  $u$ . Под движением системы, порождаемым такой реализацией  $u = u[t]$ , условимся понимать непрерывную на отрезке  $T$  функцию  $w = w[t]$ , удовлетворяющую начальному условию  $w[t_0] = x_0$  и уравнениям (26) при  $u = u[t]$ ,  $t \in T$ . Роль информационной переменной  $y_2$  в каждый момент  $t$  будет теперь играть вектор  $w[t]$  — состояние модели (26) в момент  $t$ . Роль характеристики  $\xi_2$  в каждый момент  $t$  будет играть предыстория самого управления  $u$ , реализовавшаяся к этому моменту времени  $t$ :

$$\xi_2 = \xi_2[t] = \{u[\tau], \quad t_0 \leq \tau < t\}.$$

Найдем во множестве  $V_0$  элемент  $v_0$ , имеющий минимальную в среднеквадратичном норму:

$$\begin{aligned} \|v_0\| &= \min_{v \in V_0} \|v\|, \\ \|v\| &= \left( \int_{t_0}^{\theta} |v(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Можно проверить, что такой элемент существует.

Обозначим символом  $\alpha(h)$  функцию переменной  $h$ ,  $h > 0$ , со свойствами:  $\alpha(h) > 0$  и при  $h \rightarrow 0$

$$\alpha(h) \rightarrow 0, \quad h/\alpha(h) \rightarrow 0, \quad \Omega(2h)/\alpha(h) \rightarrow 0.$$

Здесь  $\Omega$  — модуль непрерывности по  $t$  и  $x$  функции  $f$ : из условий

$$|t_* - t^*| < \delta, \quad |x - y| \leq \delta, \quad t_* \in T, \quad t^* \in T, \quad x \in M, \quad y \in M$$

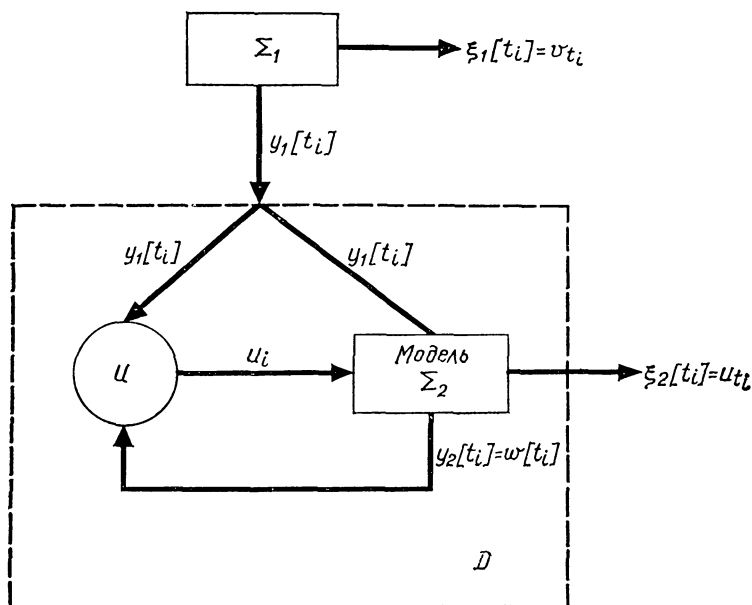


Рис. 7

при любом  $v \in P$  имеем

$$|f(t_*, x, v) - f(t^*, y, v)| \leq \Omega(2\delta).$$

В частности, в качестве  $\alpha(h)$  можно взять функцию

$$\alpha(h) = \max \{V\bar{h}, V\overline{\Omega(2h)}\}.$$

Задачу о восстановлении реализации силы  $v$  будем теперь понимать как задачу о построении **регуляризирующей** стратегии  $U(t, y_1, w)$  управления моделью (26) (рис. 7). При этом под регуляризирующей стратегией (здесь для задачи 2 это понятие уточняется) теперь понимается стратегия  $U$ , для которой можно указать такую зависимость шага  $d$  сетки  $\Delta$  от  $h$  и такую функцию  $v(h)$  с нулевым пределом в нуле, что при измерениях  $y_1$  точности  $h$  отвечающая стратегии  $U$  реализация управления  $u = u[t]$ ,  $t \in T$ , в модели  $U$

$$u = u[t] = u_i, \quad t_i \leq t < t_{i+1}, \quad i = 0, \dots, m-1,$$

удовлетворяет условию

$$\rho(u) = \inf_{v \in V_0} \|u - v\| \leq v(h).$$

Для рассматриваемой задачи такая стратегия строится на том же самом пути, что и в задаче 1.

Рассмотрим функционал

$$\Lambda = \Lambda(h; t, w_t, u_t) = \left[ \max_{t_0 \leq \tau < t} |w[\tau] - x[\tau]|^2 + \right. \\ \left. + \alpha(h) \left[ \int_{t_0}^t |u[\tau]|^2 d\tau - \int_{t_0}^t |v_0[\tau]|^2 d\tau \right] \right], \quad (27)$$

определенный при каждом  $h > 0$  и каждом  $t \in T$  на предыстории  $u_t = \{u[\tau], t_0 \leq \tau < t\}$  управления и предыстории  $w_t = \{w[\tau], t_0 \leq \tau < t\}$  отвечающего ему движения модели.

Оказывается, что функционал (27) является **оценочным** в том смысле, что если  $h$  и  $\Lambda(h, \theta, w_\theta, u_\theta)$  достаточно малы, то сколь угодно мала величина  $\rho(u_\theta)$ . Точнее: существуют функции  $\sigma_1(h)$  и  $\sigma_2(h)$ ,  $h > 0$ , имеющие в нуле нулевой предел, такие, что из неравенства

$$\Lambda(h, \theta, w_\theta, u_\theta) \leq \sigma_1(h)$$

следует неравенство

$$\rho(u_\theta) \leq \sigma_2(h).$$

Оказывается далее, что стратегия  $U$  вида

$$U(t, y_1, w) = u_*, \quad (28) \\ 2(w - y_1)' f_1(t, y_1) u_* + \alpha(h) |u_*|^2 = \\ = \min_{u \in P} [2(w - y_1)' f_1(t, y_1) u + \alpha(h) |u|^2]$$

(здесь символ  $'$  означает транспонирование) стабилизирует  $\Lambda$  в том смысле, что при любом фиксированном  $h$  на порождаемых стратегией (28) величинах  $u_t, w_t$  значение  $\Lambda(t, w_t, u_t)$  удовлетворяет неравенству

$$\Lambda(h, t, w_t, u_t) \leq \sigma_1(h),$$

если только

$$d(h) \leq h(K+1)^{-1}.$$

Ясно, что стратегия  $U$  (28) является **регуляризирующей** для нашей задачи 2. Стратегию (28) будем называть **экстремальной**.

Таким образом, в силу экстремальной стратегии реализация управления  $u$  в модели имеет вид

$$u = u[t] = u_i, \quad t_i \leq t < t_{i+1}, \quad i = 0, \dots, m-1, \quad (29)$$

где  $u_i$  — минимум на множестве  $P$  квадратичной функции  $\gamma(u) = 2(w[t_i] - y_1[t_i])' f_1(t_i, y_1[t_i]) u + \alpha(h) |u|^2$ .



Если множество  $P$  в (25) имеет простую геометрическую форму, то величины  $u_i$  находятся явно. В частности, если  $P$  — шар с центром в точке  $a$  радиуса  $R$

$$P = \{v: |v - a| \leq R\},$$

то

$$u_i = \begin{cases} a - \frac{\lambda_i l_i}{|l_i|}, & \text{если } l_i \neq 0, \\ a, & \text{если } l_i = 0. \end{cases}$$

Здесь

$$l_i = 2 [f_1(t_i, y_1[t_i]) (w[t_i] - y_1[t_i]) + \alpha(h) a],$$

$$\lambda_i = \min \left\{ \frac{|l_i|}{2\alpha(h)}, R \right\}.$$

Итак, процедура моделирования реализации неизвестной силы  $v$ , действующей на систему (24), состоит в следующем. Прежде всего назначаются функции  $\alpha(h)$  и  $d(h) \leq h(K+1)^{-1}$ . По поступлении (до начала моделирования  $t_0$ ) величины  $h$  выбирается какая-то временная сетка  $\Delta$  с шагом  $d(h)$ . Затем управляющее воздействие моделью строится согласно (29).

Обратимся теперь к задаче о моделировании из примера 3, предполагая, что коэффициент упругой характеристики принимает значения из промежутка  $[b_1, b_2]$ . Очевидно, мы имеем дело с конкретным случаем рассмотренной задачи 2. Явные формулы для  $u_i$  (29) здесь, очевидно, без труда выписываются. Результаты численного моделирования для этой конкретной задачи имеются в [5].

Опираясь на решение задачи 2 и переходя к конечно-мерной аппроксимации системы (15) по методу прямых или методу Фурье, можно изучить и задачу о моделировании помехи из примера 4 (предполагая, что  $A$  — линейный равномерно эллиптический оператор второго порядка с достаточно гладкими коэффициентами и граница  $\Gamma$  множества  $\Omega$  достаточно гладкая).

Рассмотрим теперь случай уравнения (24), не предполагая, что функция  $f$  в правой части имеет специальную структуру. Предположим, что, однако, снова известно множество  $M$ , известна константа  $K$ , ограничивающая функцию  $f$ ,

$$|f(t, x, v)| \leq K, \quad x \in M, \quad t \in T, \quad v \in P,$$

и что наблюдаемое с погрешностью  $h$  движение  $x[t]$  может порождаться только одной реализацией силы  $v = v[t]$ .

Введем вспомогательную управляемую систему

$$\dot{z} = q, \quad z(t_0) = x_0, \quad t \in T = [t_0, \theta], \quad (30)$$

где  $z$  —  $n$ -мерный вектор и  $n$ -мерное управление  $q$  стеснено ограничением

$$|q| \leq K.$$

Очевидно, движение  $x[t]$  системы  $\Sigma_1$  (24) можно представить как движение  $z[t]$  системы (30) под действием управления

$$q[t] = f(t, x[t], v[t]).$$

Из предыдущего мы знаем, как восстановить приближенно в среднеквадратичном реализацию управления  $q = q[t]$ ,  $t \in T$ . Для этого следует в качестве модели взять управляемую систему  $\Sigma_2^*$  вида

$$\dot{w} = u, \quad w(t_0) = x_0, \quad t \in T = [t_0, \theta], \quad (31)$$

где  $w$  —  $n$ -мерный вектор и  $n$ -мерное управление стеснено условием

$$|u| \leq K.$$

Управление этой моделью следует осуществлять согласно экстремальной стратегии. Управляющее воздействие  $u_i$  (29) имеет при этом здесь вид:

$$u_i = \begin{cases} -\frac{\lambda_i l_i}{|l_i|}, & \text{если } l_i \neq 0, \\ 0, & \text{если } l_i = 0, \end{cases}$$

где

$$l_i = 2(w[t_i] - y_1[t_i]),$$

$$\lambda_i = \min \left\{ \frac{|l_i|}{2\alpha(h)}, K \right\}.$$

Введем еще одну управляемую модель вида

$$\dot{\bar{w}} = \bar{u}, \quad \bar{w}(t_0) = 0, \quad t \in T = [t_0, \theta], \quad (32)$$

где  $\bar{w}$  —  $n$ -мерный вектор и  $n$ -мерное управление  $\bar{u}$  стеснено ограничением

$$\bar{u} \in P.$$

На каждом временном промежутке  $[t_i, t_{i+1}]$  будем управление в модели (32) назначать постоянным, равным

$$\bar{u}[t] = \bar{u}_i, \quad t_i \leq t < t_{i+1},$$

где  $\bar{u}_i$  — точка минимум на множестве  $P$  функции

$$\beta(u) = |u_i - f(t_i, y_1[t_i], u)|:$$

$$|u_i - f(t_i, y_1[t_i], \bar{u}_i)| = \min_{u \in P} \beta(u).$$

Оказывается, что реализующееся в модели (32) управление  $\bar{u}[t]$  и есть искомое приближение к реализации неизвестной силы  $v$  в системе (24):

$$\int_{t_0}^{\theta} [\bar{u}[t] - v[t]]^2 dt \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0.$$

С другими обратными задачами динамики — задачами восстановления сил по наблюдаемым движениям можно познакомиться в [3, 6].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. — М.: Наука, 1985. — 520 с.
2. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 456 с.
3. Осипов Ю. С., Кряжимский А. В. О динамическом решении операторных уравнений. — Докл. АН СССР, 1983, т. 269, № 3, с. 552—556.
4. Кряжимский А. В., Осипов Ю. С. О моделировании управления в динамической системе. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1983, № 2, с. 51—60.
5. Осипов Ю. С., Кряжимский А. В. О моделировании параметров динамической системы. — В кн.: Задачи управления и моделирования в динамических системах. — Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984, с. 47—68.
6. Krjažimskii A. V., Osipov Yu. S. On positional calculation of  $\Omega$ -normal controls in dynamical system. — Probl. Control & Inform. Theory, 1984, vol. 13 (6), p. 425—436.
7. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979. — 285 с.
8. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. — М.: Наука, 1978. — 206 с.
9. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. — М.: Наука, 1977. — 392 с.
10. Фомин В. Н., Фрадков А. Л., Якубович В. А. Адаптивное управление динамическими объектами. — М.: Наука, 1981. — 447 с.



И. И. Еремин,

доктор физико-математических наук

## ПРОТИВОРЕЧИВЫЕ МОДЕЛИ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Практика моделирования конкретных задач производственного планирования, оптимального проектирования и конструирования столкнулась с ситуацией, когда получаемая модель противоречива. Например, в модели линейного программирования противоречива (несовместна) система ее ограничений (система линейных неравенств). Противоречивые модели обладают тем свойством, что правильное (с логической точки зрения) оперирование с ними приводит к логическому противоречию, например к неверному соотношению типа неравенства  $1 \leq 0$ . Поясним это на примере противоречивой (несовместной) системы линейных уравнений. Уравнения такой системы всегда можно умножить на некоторые отличные от нуля числа так, что после сложения их получим противоречивое соотношение  $1 = 0$ .

В чем может состоять природа возникновения противоречивых моделей применительно к задачам оптимального

планирования? Сделаем на этот счет пока предварительные замечания. Принцип оптимальности в области математических методов принятия решений в экономике состоит в выборе из всего множества допустимых решений (планов, проектов) оптимального в силу того или иного критерия оптимальности (максимум прибыли, минимум трудовых затрат и т. д.). Если с понятием плана связывать вектор  $x = [x_1, \dots, x_n] \in R^n$ , его описывающий, то допустимая область может быть представлена как пересечения двух:

$R^n \subset M_1$  — область технологических и ресурсных возможностей объекта планирования;

$M_2$  — область требований, характеристик, оценок, предъявляемых к моделируемому объекту.

Допустимым планом (проектом)  $x$  будет только такой, который принадлежит как множеству  $M_1$ , так и  $M_2$ , т. е.  $x \in M_1 \cap M_2$ .

Но довольно типичной является ситуация, когда совокупность требований к объекту планирования (проектирования) вступает в противоречие с технологическими и ресурсными возможностями, что в нашем случае может быть охарактеризовано свойством пустоты пересечения  $M = M_1 \cap M_2$ , т. е.  $M = \emptyset$ . Решение возникшего вопроса можно видеть (в содержательном смысле) в определенном смысле в минимальном расширении множеств  $M_1$  и  $M_2$ , обеспечивающем непустоту их пересечения. Это сводится к увеличению технологических и ресурсных возможностей, с одной стороны, а с другой — к ослаблению требований к объекту планирования (проектирования).

Ниже при анализе названного вопроса акцент будет сделан на задачах производственного планирования (в рамках моделей линейного программирования), поэтому имеет смысл вначале остановиться на ситуации, которая к настоящему времени сложилась в практике применения экономико-математических методов.

Экономико-математические методы, несомненно, принесли свою пользу при решении планово-экономических задач, однако выявились и существенные трудности. Последние имеют разную природу. Отметим вначале такие, как недостаточное совершенство математического аппарата, плохое информационное обеспечение: неполнота, недостоверность, неточность информации, невозможность ее оперативного использования из-за отсутствия автоматизированных баз данных и др. Особо: нерешенность в должной

полноте проблемы формирования системы оценочных показателей, недостаточное алгоритмическое и программное обеспечение, малая производительность используемых ЭВМ. Отметим также трудности, связанные с качеством моделирования. Обеспечить высокий уровень моделирования, ведущий к созданию адекватной рабочей модели экономического (производственного) объекта, хорошо «притертой» к нему, хорошо описывающей его функционирование, позволяющей отслеживать и прогнозировать развитие объекта планирования, — задача нелегкая, но разрешимая.

Рассмотрим некоторые нерешенные вопросы, возникавшие при внедрении математических методов и ЭВМ в практику планирования конкретного производства. Внедрение рассчитанных оптимальных планов или даже только тех или иных рекомендаций, вытекающих из них, представляет серьезную проблему. Экономико-математический метод, ориентирующийся на принцип оптимальности и принцип максимальной эффективности, наталкивается на несоответствие его с реальным хозяйственным механизмом и некоторыми традициями. Поэтому даже хорошо и квалифицированно разработанные производственные (экономические) программы, вобрав в себя все необходимые научные достижения, зачастую «рассыпаются» при соприкосновении с производственной реальностью. Таких примеров немало. Поиск методов преодоления этих трудностей и противоречий — многопрофильная и многотрудная задача.

При традиционной технологии принятия решений, основанной на «ручном» счете, управленческий персонал непосредственно участвует в выборе плановых решений и экономически или административно отвечает за их последствия. При использовании же математических методов эта цепь разрывается. Действительно, разработка математических моделей и проведение расчетов осуществляется, как правило, научными подразделениями, которые не несут практически никакой ответственности за качество решений. Управленческий же персонал, не имея соответствующей квалификации, фактически не принимает участия в выработке решений, но ответствен за все последствия, связанные с их реализацией.

Другая трудность. Динамизм параметров экономических систем, большое число внешних воздействий на объект планирования приводят к тому, что сбор информации, ее обработка, проведение оптимизационных расчетов, анализ полученных решений требуют достаточно большого проме-

жутка времени. Это же ведет к тому, что за рассматриваемый период параметры системы изменяются в мере, которая делает рассчитанные планы непригодными для практического применения, так как они описывают уже иную, чем сложившуюся к этому времени, ситуацию. Сокращение сроков проведения расчетов за счет автоматизации обработки информации, создание более совершенных программ анализа исходных данных, проведение расчетов на более производительных ЭВМ, безусловно, уменьшает остроту проблемы, но не снимает ее.

Остановимся на качестве информационного обеспечения задач оптимального планирования. Погрешности в методике проведения нормативных расчетов, недостаточность и неполнота в учете условий производства и т. п. приводят к тому, что технико-экономические показатели определяются с некоторым (иногда весьма существенным) искажением. Повышение достоверности регистрируемых величин путем расширения системы учета, во-первых, не всегда дает желаемые результаты и, во-вторых, приводит к увеличению его трудоемкости. К тому же ориентация на традиционные методы учета неприемлема по той причине, что, как отмечается в литературе, организация на ЭВМ решения плановых задач вызывает необходимость увеличения объема требующихся для этих целей информации в сравнении с ручной технологией примерно на два порядка. Это, конечно, на основе традиционных процедур учета сделать невозможно. Выход состоит в разработке формальных методов построения адекватного информационного описания производственно-экономических систем на базе использования баз и банков данных. Безусловно, автоматизация учета — не менее важная проблема, чем внедрение ЭВМ в планирование производства.

В целом возникает довольно трудная и противоречивая ситуация. Параллельно реальной производственной сфере с ее реальными (но не обязательно «писаными») проявлениями существует информационно-отображающая сфера с функциями, в частности, быть фундаментом для управления материальной сферой на базе официально закрепленных положений. Однако эта сфера изобилует большим количеством систематических и случайных помех, разными механизмами искажения и фильтрации. Разрыв между «писаными» и реальными законами этих двух сфер, неадекватное отображение материальной сферы информационной сферой, другие несоответствия между ними создают одну

из самых серьезных проблем управления, в частности проблеме эффективного применения экономико-математических методов и ЭВМ. Последние ориентируются на данные второй (информационной) сферы, на официальный порядок вещей, который диктует «как должно быть», а не «как есть». Не закладываются ведь в математические модели способы утаивания от контролирующих органов производственных резервов, рванный характер выполнения планов, низкий уровень производственной дисциплины и многое другое. Все это приводит к тому, что мы вырабатываем управляющие воздействия на основе моделей на самом деле несуществующих производств и пытаемся применить их к реальным производственным объектам. Поэтому не случайно, что иногда становится очевидной неприменимость рассчитанных управляющих воздействий. Однако если последние были бы даже формально правильными (скажем, в предположении идеально функционирующего производства), то на практике их реализация могла бы натолкнуться на такие трудности, как волюнтаризм при принятии решений, несоответствие традиционным методам выработки решений, а также на психологический барьер, связанный с ущемлением социальной значимости тех или иных плановых служб.

Таким образом, роль достоверности и своевременности информации для планирования и управления велика. Одно дело, когда информация по своей природе носит неопределенный характер или неточна, и тогда с такой ситуацией можно бороться формальными (математическими) средствами. Совсем другое, когда она искажена сознательно, например, под напором желания обеспечить бумажное благополучие как основы для обеспечения ведомственных, групповых и личных интересов, не безобидных с точки зрения закона и права.

Следует сказать, что все перечисленные проблемы в принципе преодолимы. Несколько другая по своей природе трудность (возможно, главная) состоит в объективной мере возможной математизации конкретных проблем и задач экономики. Эта мера в первую очередь зависит от состояния самой экономики, от структуры и традиций управления, от реальных законов ее функционирования и эволюции. В этих вопросах роль средств, связанных с применением точных наук, отодвигается на задний план. На первый же план выступают проблемы глубокого научного анализа экономики, установления действительных ее зако-



нов, приведения хозяйственного механизма в соответствие с этими законами.

Кратко коснемся вопроса об элементарных периодах планирования и обратных связях. В области моделирования и решения задач экономики определенные трудности, связанные с необходимостью оперативного учета быстрых изменений в производственной ситуации, можно снять за счет применения методов и средств непрерывного планирования, обеспеченного интерактивными (диалоговыми) средствами обработки данных. Эта форма планирования связана с уменьшением элементарных периодов воздействия на производственный процесс, т. е. периодов, в течение которых действует управление, выработанное на конец предыдущего элементарного периода. Реализация малых периодов реагирования возможна лишь на базе использования достаточно мощных ЭВМ и высоко автоматизированного комплекса счета в целом. Все это потенциально дает возможность организации обратных связей за счет своевременного получения измененных управляющих параметров. Такой механизм динамического анализа производства делает возможным в рамках единой схемы и планировать, и управлять процессом выполнения плановых программ. При малых элементарных периодах планирования способ управления экономическими объектами становится близким к методам управления технологическим процессом.

Как уже было отмечено, практика решения оптимизационных экономических задач на основе их математического моделирования породила новую проблему, связанную с появлением противоречивых моделей. Частным проявлением этого обстоятельства является несовместимость ограничений модели, например, модели линейного программирования. Изучение задач или теоретических моделей экономики, содержащих противоречия, связано с необходимостью научного обоснования процедур корректирования таких задач и моделей.

Источниками противоречивости моделей могут служить: ресурсный дефицит, завышенные плановые задания, отсутствие резервов производственных мощностей, неточность экономической информации, учет противоречивых директив, учет нормативов на отрицательное воздействие производства на окружающую среду и др.

Но на противоречивость формализованных описаний экономики (моделей) не следует смотреть как на характеристику и атрибут плановости, скорее это следствие дирек-

тивности, не приведенной в соответствие с экономическим принципом оптимальности планов. Последний же требует адекватного хозяйственного механизма. Оптимальность же планов предполагает их динамическую сбалансированность, максимальную выгодность их выполнения как для государства, так и для конкретных производств, гарантию их выполнения в силу хозяйственного механизма, качества продукции (услуг), свойство эластичности и устойчивости их выполнения относительно случайных помех.

Возникновение противоречивых моделей—довольно обычная для практики ситуация. В простейших моделях преодоление противоречивости модели за счет ее коррекции (ослабления ограничений и выбрасывания их части, коррекции информации и т. д.) не представляет особого труда. Изучение более сложных моделей, отражающих существенно более сложные ситуации, приводит к принципиальной необходимости учета появления несобственных (противоречивых) моделей, а следовательно, необходимости разработки их теории (в первую очередь двойственности), методов численного анализа и его программного обеспечения.

В настоящей статье сделана попытка в достаточно элементарной форме изложить эти вопросы. Для их усвоения достаточно владеть элементарными сведениями из линейной алгебры.

## Модель линейного программирования

Более конкретный разговор о противоречивых моделях начнем с простейшего примера.

Таблице чисел

4	5	
2	1	8
4	6	24

придадим следующий смысл. Пусть имеются два вида материалов (ресурсов) в количествах 8 и 24, из которых изготавливаются два вида изделий. На единицу изделия первого вида расходуются материалы в количествах 2 и 4, а второго вида—1 и 6. Числа 4 и 5 будем понимать как цены реализации изделий. Ставится задача: в каких коли-

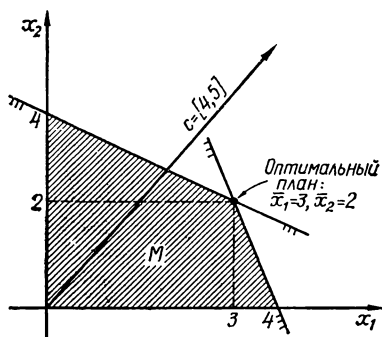


Рис. 8

чествах следует изготовить изделия, чтобы обеспечить максимум дохода? Эту задачу можно сформулировать на математическом языке (построить математическую модель). Обозначив через  $x_1$  и  $x_2$  количества производимых изделий 1-го и 2-го видов соответственно, будем иметь:

$2x_1 + 1x_2$  — расход материала первого вида;

$4x_1 + 6x_2$  — » » второго »

$4x_1 + 5x_2$  — доход от реализации продукции.

Учитывая ограничения на используемые материалы, получим задачу: максимизировать доход  $4x_1 + 5x_2$  при условиях

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 8, \\ 4x_1 + 6x_2 &\leq 24, \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Этой задаче можно дать геометрическую интерпретацию (рис. 8). Каждое из неравенств системы (1) определяет полуплоскость, их пересечение (заштрихованный четырехугольник  $M$ ) — это ресурсно обеспеченная область допустимых решений (планов). Вершина четырехугольника  $\bar{x} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2] = [3, 2]$  задает оптимальный план, обеспечивающий максимальный доход  $4\bar{x}_1 + 5\bar{x}_2 = 22$ .

В данном примере мы допустили маленькую «хитрость». Она состоит в том, что подбором цифр мы обеспечили целочисленность вершин четырехугольника  $M$  (т. е. целочисленность координат вершин). Поэтому и оптимальный план  $\bar{x}$  целочислен, что соответствует пониманию величин  $x_1$  и  $x_2$  как количеств изделий 1-го и 2-го видов, единица

каждого из которых неделима. Но можно задаче дать и другие интерпретации, при которых переменные  $x_1$  и  $x_2$  могут принимать и дробные значения (например, когда  $x_1$  и  $x_2$  — количества смесей из разных исходных веществ).

В общей постановке рассмотренная задача может быть записана в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \max \sum_{i=1}^n c_i x_i \quad \text{при ограничениях} \\ \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \leq b_j \quad (j=1, \dots, m), \\ x_i \geq 0 \quad (i=1, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь в соответствии с рассмотренной интерпретацией:  $n$  — число производимых видов продукции;  $m$  — число видов используемых ресурсов;  $c_i$  — цена реализации единицы продукции  $i$ -го вида;  $b_j$  — объем ресурса  $j$ -го вида,  $a_{ji}$  — затраты  $j$ -го ресурса на единицу продукции  $i$ -го вида;  $x_i$  — объем производимой продукции  $i$ -го вида.

Задача (2) — это задача линейного программирования (ЛП) в общей постановке. Она в матричном виде может быть записана так:

$$L: \max \{(c, x) \mid Ax \leq b, x \geq 0\}, \quad (3)$$

где  $(c, x)$  — скалярное произведение векторов  $c = [c_1, \dots, c_n]^T$  и  $x = [x_1, \dots, x_n]^T$ , т. е.  $(c, x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i$ ,  $A$  — матрица коэффициентов,  $b = [b_1, \dots, b_m]^T$  — вектор ресурсов (символ  $T$  над матрицей означает ее транспонирование).

Таким образом, задача (2) (или частный ее вид (1)) — это задача на отыскание оптимальной структуры производства продукции, т. е. оптимального плана производства. Но на практике, как правило, не предприятие определяет для себя план, его «спускают сверху», т. е. план является директивным. Пусть  $\bar{x} = [\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n]^T$  — директивное задание (директивный план). Тогда в системе ограничений модели (2) неравенства  $x_i \geq 0$  надо заменить на  $x_i \geq \bar{x}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) — требование выполнения плана (с возможностью перевыполнения). Но план  $\bar{x}$  может оказаться нереализуемым по причине ресурсной необеспеченности. Это соответствует тому, что вектор  $A\bar{x}$  затрат ресурсов на выполнение директивного плана не удовлетворяет неравенству  $A\bar{x} \leq b$ .

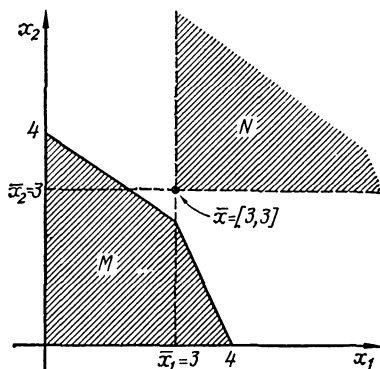


Рис. 9

В этом случае система ограничений в форме

$$Ax \leq b, x \geq \bar{x} \quad (4)$$

несовместна, т. е. не имеет решений. Вектор дефицита ресурсов, соответствующий плану  $\bar{x}$ , можно выразить как  $[A\bar{x} - b]^+$ , где  $+$  над вектором означает замену его отрицательных координат нулями. Если систему  $Ax \leq b, x \geq \bar{x}$  заменить на  $Ax \leq b + [A\bar{x} - b]^+, x \geq \bar{x}$ , т. е. вектор ресурсов  $b$  увеличить на меру ресурсного дефицита  $\Delta = [A\bar{x} - b]^+$ , то она становится совместной.

Вернемся к примеру (1). Пусть в нем  $\bar{x}_1 = 3, \bar{x}_2 = 3$ , т. е. директивные объемы производимой продукции задаются числами 3 и 3. Тогда графически систему (4), т. е. в данном случае систему

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 8, \\ 4x_1 + 6x_2 &\leq 24, \\ x_1 &\geq 3, x_2 \geq 3, \end{aligned}$$

можно изобразить так, как на рис. 9.

На рис. 9  $M$ —это прежняя область ресурсных возможностей, а  $N$ —область директивных заданий:  $x_1 \geq 3, x_2 \geq 3$ . Множества  $M$  и  $N$  имеют пустое пересечение, т. е.  $M \cap N = \emptyset$ . Следовательно, в рассматриваемом случае план  $\bar{x} = [3, 3]$ —нереальный, для его выполнения не хватает ресурсов. Мера дефицита, как мы уже отметили, задается вектором  $\Delta = [A\bar{x} - b]^+$ , что в нашем примере соответствует  $\Delta = [2 \cdot 3 + 3 - 8, 4 \cdot 3 + 6 \cdot 3 - 24]^+ = [1, 6]$ . Если недо-

стающие объемы ресурсов в количествах 1 и 6 добавить к правым частям в (1), то полученной системе ограничений  $2x_1 + x_2 \leq 8 + 1 = 9$ ,  $4x_1 + 6x_2 \leq 24 + 6 = 30$  директивный план  $\bar{x} = [3, 3]$  удовлетворяет.

Математическую модель с противоречивой (несовместной) системой ограничений будем называть **противоречивой**. Если говорить о несовместной системе линейных неравенств, пусть в форме  $Ax \leq b$ , то путем операции умножения неравенств на положительные числа и их сложения можно получить противоречивое неравенство  $1 \leq 0$ . Есть понятие более общее, чем противоречивость модели в выше означенном смысле, — это **несобственность** модели, определяемое через отрицание свойства ее разрешимости вместе с двойственной и совпадения их оптимальных значений [1].

## Классификация противоречивых задач ЛП

Задача линейного программирования (3) называется разрешимой, если ее допустимая область  $M = \{x \geq 0 \mid Ax \leq b\}$  — не пуста и  $\sup \{(c, x) \mid x \in M\} = \gamma < +\infty$ . Тогда существует  $\bar{x} \in M$  такой, что  $(c, \bar{x}) = \gamma$ , т. е. вектор  $\bar{x}$  из  $M$  реализует верхнюю границу функции  $(c, x)$  на многограннике  $M$ . В этом случае вектор  $\bar{x}$  называется **оптимальным** (вектором или планом) для задачи (3), а  $\gamma$  — **оптимальным ее значением**.

В линейном программировании важную роль играет **двойственность**, сопоставляющая исходной задаче (3) новую задачу линейного программирования (двойственную),

которая имеет вид:  $\min \sum_{j=1}^m b_j u_j$  при ограничениях

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m a_{ji} u_j &\geq c_i \quad (i = 1, \dots, n), \\ u_j &\geq 0 \quad (j = 1, \dots, m), \end{aligned}$$

или в матричной записи:

$$L^*: \min \{(b, u) \mid A^T u \geq c, u \geq 0\} (= \bar{\gamma}). \quad (5)$$

Задачи  $L$  и  $L^*$ , т. е. (3) и (5), связывает важная **теорема двойственности**:

Если задача (3) разрешима, то и двойственная задача (5) разрешима, при этом их оптимальные значения совпадают, т. е.  $\gamma = \bar{\gamma}$ .

Теорема двойственности позволяет решение задачи ЛП (3) свести к решению просто системы линейных неравенств, а именно

$$\left. \begin{aligned} Ax \leq b, \quad x \geq 0; \quad A^T u \geq c, \quad u \geq 0; \\ (b, u) \leq (c, x). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Связь между системой (6) и задачами (3) и (5) такова: если  $\bar{x}$  и  $\bar{u}$  — оптимальные решения задач (3) и (5), то вектор  $[\bar{x}, \bar{u}]$  является решением системы (6). И обратно: если  $[\bar{x}, \bar{u}]$  — некоторое решение системы (6), то  $\bar{x}$  и  $\bar{u}$  оптимальны для задач (3) и (5) соответственно.

Поясним важный смысл оптимального вектора  $\bar{u}$  задачи (5). Обозначим через  $f(b)$  оптимальное значение задачи (3) как функцию от вектора  $b$  (вектора ресурсов). Если  $\Delta b$  — некоторое малое приращение вектора  $b$ , то справедливо соотношение

$$f(b + \Delta b) \approx f(b) + \sum_{j=1}^m \Delta b_j u_j,$$

где  $\Delta b = [\Delta b_1, \dots, \Delta b_m]^T$ ,  $\bar{u} = [\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m]^T$ . Приведенная формула позволяет не решать заново задачу ЛП, если имели место малые изменения вектора ресурсов, ибо в этой ситуации оптимальное значение  $f(b + \Delta b)$  новой задачи может быть вычислено по приведенной формуле.

Обозначим через  $M^*$  допустимое множество задачи (5), т. е.  $M^* = \{u \geq 0 \mid A^T u \geq c\}$ . Условие непустоты множеств  $M$  и  $M^*$  является необходимым и достаточным для разрешимости задач  $L$  и  $L^*$ . Следовательно, если задача линейного программирования разрешима, то она является собственной (в силу сформулированной теоремы двойственности). В случае же произвольной задачи математического программирования (т.е. задачи максимизации или минимизации функции многих переменных при ограничениях в форме неравенств и уравнений) это не так, т. е. исходная задача может быть разрешимой, а двойственная неразрешимой или обе разрешимы, но их оптимальные значения не совпадают.

Если задача (3) не разрешима, то могут быть случаи:

- 1)  $M = \emptyset$ ,  $M^* \neq \emptyset$ ;
- 2)  $M \neq \emptyset$ ,  $M^* = \emptyset$ ;
- 3)  $M = \emptyset$ ,  $M^* = \emptyset$ .

В зависимости от выполнимости одной из этих альтернатив о задаче (3) говорят как о несобственной задаче линейного программирования 1-го, 2-го и 3-го рода соответственно. Приведенные три альтернативы как раз классифицируют несобственные задачи линейного программирования. Каждую из этих альтернатив можно охарактеризовать содержательно, т. е. придать содержательный смысл несобственной модели (3) в зависимости от рода ее несобственности. Несобственность 1-го рода означает, что если с помощью приращения  $\Delta b$  обеспечить совместность системы неравенств

$$Ax \leq b + \Delta b, \quad x \geq 0, \quad (7)$$

то задача ЛП

$$\max \{(c, x) \mid Ax \leq b + \Delta b, \quad x \geq 0\} \quad (8)$$

будет разрешимой. Несобственность 2-го рода означает  $\sup \{(c, x) \mid x \in M\} = +\infty$ . В случае несобственности 3-го рода из совместности системы (7) при некотором приращении  $\Delta b$  следует

$$\sup \{(c, x) \mid Ax \leq b + \Delta b, \quad x \geq 0\} = +\infty.$$

В теоретическом и численном анализе несобственных задач ЛП важную роль играет **двойственность**, что соответствует ее роли в линейном программировании на случай разрешимых задач. Прежде чем коснуться этого вопроса, рассмотрим постановку задачи о коррекции несобственной задачи ЛП.

## Методы коррекции противоречивых задач ЛП

Один из общих вопросов о коррекции неразрешимой задачи ЛП состоит в ее параметризации, а именно: пусть задача  $L$  погружается в параметрический класс задач  $\{L_\Delta\}$ , где  $\Delta$  — векторный параметр из некоторого множества  $\Omega_0$  значений этого параметра. Погружение  $L$  в класс  $\{L_\Delta\}$  означает, что при некотором  $\Delta_0 \in \Omega_0$  задачи  $L$  и  $L_{\Delta_0}$  совпадают. Определяется множество

$$\Omega = \{\Delta \in \Omega_0 \mid L_\Delta \text{ — разрешима}\}. \quad (9)$$

Таким образом, взяв значение параметра  $\Delta$  из множества  $\Omega$ , мы получим разрешимую задачу  $L_\Delta$ , которую можно рассматривать как результат коррекции задачи  $L$ . Но если ввести функцию **качества коррекции**  $\varphi(\Delta)$ , то можно по-



ставить задачу оптимальной коррекции в форме

$$\min \{ \varphi(\Delta) \mid \Delta \in \Omega \}. \quad (10)$$

Приведем примеры задачи типа (9). Параметризуем задачу  $L$  в форме (8), при этом параметром  $\Delta$  является  $\Delta b$ . Можно положить  $\Omega_0 = \{ \Delta b \geq 0 \}$ . Если  $L$  — несобственная задача 1-го рода, то множество  $\Omega$ , определяемое соотношением (9), может быть представлено в виде

$$\Omega = \{ \Delta b \geq 0 \mid M(\Delta b) \neq \emptyset \},$$

где  $M(\Delta b) = \{ x \geq 0 \mid Ax \leq b + \Delta b \}$ . Взяв, например, в качестве функции  $\varphi$  качества коррекции  $\varphi(\Delta) = \|\Delta b\|^2 = \sum_{j=1}^m (\Delta b_j)^2$ , задачу (10) можно записать так:

$$\min \{ \|\Delta b\|^2 \mid Ax \leq b + \Delta b, [x, \Delta b] \geq 0 \}.$$

Это суть разрешимая задача квадратичного программирования. Если  $[\bar{x}, \bar{\Delta b}]$  — ее решение, то откорректированная модель будет иметь вид

$$\min \{ (c, x) \mid Ax \leq b + \bar{\Delta b}, x \geq 0 \}.$$

Взяв в качестве  $\varphi$  функцию  $\varphi(\Delta) = \sum_{j=1}^m \bar{u}_j \Delta b_j$  ( $\bar{u}_j > 0$ ), а в качестве системы ограничений исходной модели — систему (4), получим задачу коррекции в форме

$$\min \left\{ \sum_{j=1}^m \bar{u}_j \Delta b_j \mid Ax \leq b + \Delta b, x \geq \bar{x}, \Delta b \geq 0 \right\}. \quad (11)$$

Смысл такой коррекции имеет простой экономический смысл. Задаче

$$\max \{ (c, x) \mid Ax \leq b, x \geq \bar{x} \} \quad (12)$$

будем придавать уже отмеченный ранее смысл:  $A$  — технологическая матрица;  $b$  — вектор расходуемых ресурсов;  $x$  — вектор структуры производимой продукции;  $c$  — вектор цен на продукцию. Пусть система ограничений  $Ax \leq b, x \geq \bar{x}$  в (12) несовместна, т. е. ресурсов  $b$  не хватает для реализации плана  $\bar{x}$ . Однако путем привлечения дополнительных ресурсов  $\Delta b$  систему ограничений  $Ax \leq b + \Delta b, x \geq \bar{x}$  можно сделать совместной. Если  $\bar{u}_j$  — потери, связанные с приобретением дополнительной единицы  $j$ -го ресурса,

то  $\sum_{j=1}^m \bar{u}_j \Delta b_j$  — общие потери, связанные с приобретением дополнительных ресурсов  $\Delta b = [\Delta b_1, \dots, \Delta b_m]^T$ . Задача коррекции (11) формулирует требование минимизации таких потерь. Так как потери  $\sum_{j=1}^m \bar{u}_j \Delta b_j$  вычитаются из дохода  $(c, x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i$ , то задачу коррекции (11) можно соединить с исходной постановкой (12), получив задачу

$$\max \{(c, x) - r(\bar{u}, \Delta b) \mid Ax \leq b + \Delta b, x \geq \bar{x}\}, \quad (13)$$

где  $r$  — усиливающий коэффициент;  $r > 1$ . Решение этой задачи (при достаточно большом  $r$ ) дает такой вектор  $\tilde{x}$ , который реализует максимум дохода  $(c, x)$  на множестве оптимально скорректированных планов задачи (11).

Описанный способ коррекции несобственной задачи ЛП 1-го рода хотя и достаточно прост, но вместе с тем он, по-видимому, и наиболее целесообразен для практики приложений. К тому же он может быть осуществлен на основе обычного пакета программ ЛП, предназначенного для разрешимых задач линейного программирования.

Неразрешимую задачу (12) можно было бы корректировать не только за счет вариации ресурсов  $b$  но и за счет вариации плана  $\bar{x}$ , в этом случае задача коррекции (11) заменится на

$$\min \{(\bar{u}, \Delta b) + (\delta, \Delta x) \mid Ax \leq b + \Delta b, x \geq \bar{x} - \Delta x \geq 0, \Delta x \geq 0\}. \quad (14)$$

Здесь  $\delta = [\delta_1, \dots, \delta_n] > 0$  — потери, связанные с уменьшением  $i$ -й позиции плана на 1. Тогда  $(\delta, \Delta x) = \sum_{i=1}^n \delta_i \Delta x_i$  — общие потери, связанные с уменьшением плана  $\bar{x}$  на  $\Delta x$ . Аналогом задачи (13) здесь будет

$$\begin{aligned} \max \{(c, x) - r[(\bar{u}, \Delta b) + (\delta, \Delta x)] \mid Ax \leq b + \Delta b, \\ x \geq \bar{x} - \Delta x \geq 0, \Delta x \geq 0, \Delta b \geq 0\}. \end{aligned}$$

Расшифровка смысла решения этой задачи аналогична смыслу решения задачи (13).

В начале статьи для задачи планирования мы ввели два множества:  $M_1$  — множество технологических и ресурс-

ных возможностей;  $M_2$  — множество директивных требований, предъявляемых к плану и процессу его реализации. Такое разбиение множества ограничений в задачах производственного планирования на две категории носит суженный характер. На самом деле имеют место ограничения и другого рода (социальные ограничения, экономические и др.). Если  $M_1 = \{x \geq 0 \mid Ax \leq b\}$ ,  $M_2 = \{x \geq 0 \mid Bx \geq d\}$ , то, как правило,  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ , т. е. множества  $M_1$  и  $M_2$  не пересекаются. В этом случае задача

$$\max \{(c, x) \mid Ax \leq b, Bx \geq d, x \geq 0\} \quad (15)$$

несобственная. Ее коррекция может осуществляться за счет векторов  $b$  и  $d$ :

$$\min \{(\bar{u}, \Delta b) + (\bar{v}, \Delta d) \mid Ax \leq b + \Delta b, Bx \geq d - \Delta d, [x, \Delta b, \Delta d] \geq 0\}. \quad (16)$$

Интерпретацию векторов  $\bar{u} > 0$  и  $\bar{v} > 0$  здесь давать уже нет смысла, так как она аналогична интерпретации  $\bar{u}$  и  $\bar{d}$  в задаче (14). Соединение задач (15), исходной и (16) дает задачу

$$\max \{(c, x) - r [(\bar{u}, \Delta b) + (\bar{v}, \Delta d)] \mid Ax \leq b + \Delta b, Bx \geq d - \Delta d, [x, \Delta b, \Delta d] \geq 0\}.$$

Это суть задача ЛП, и она может быть решена, например, симплекс-методом.

Вернемся к задаче ЛП в форме (3), не делая предположений относительно рода несобственности. Тогда ее коррекция не может быть осуществлена только за счет вариации вектора  $b$ . Однако за счет вариации векторов  $b$  и  $c$  такую коррекцию осуществить можно. А именно, введем в задачу (3) параметр  $\Delta = [\Delta b, \Delta c] \geq 0$ :

$$\max \{(c - \Delta c, x) \mid Ax \leq b + \Delta b, x \geq 0\}. \quad (17)$$

Положим  $\Omega_0 = \{[\Delta b, \Delta c] \geq 0\}$ . Множество  $\Omega$ , задаваемое в общем случае согласно (9), в нашем случае может быть охарактеризовано следующим образом (это вытекает из принципа двойственности в линейном программировании):

$$\Omega = \{[\Delta b, \Delta c] \geq 0 \mid M(\Delta b) \neq \emptyset, M^*(\Delta c) \neq \emptyset\},$$

где  $M(\Delta b) = \{x \geq 0 \mid Ax \leq b + \Delta b\}$ ,  $M^*(\Delta c) = \{u \geq 0 \mid A^T u \geq c - \Delta c, u \geq 0\}$ . Если в качестве функции коррекции  $\varphi(\Delta)$  взять  $\varphi(\Delta b, \Delta c) = (\bar{u}, \Delta b) + (\bar{v}, \Delta c)$ , где  $\bar{u} > 0$ ,  $\bar{v} > 0$ ,

то задача оптимальной коррекции (10) в рассматриваемом случае записывается так:

$$\min \{(\bar{u}, \Delta b) + (\bar{v}, \Delta c) \mid Ax \leq b + \Delta b, \\ A^T u \geq c - \Delta c, [x, \Delta b, \Delta c] \geq 0\}.$$

Последняя расщепляется на две самостоятельные задачи линейного программирования:

$$\min \{(\bar{u}, \Delta b) \mid Ax \leq b + \Delta b, [x, \Delta b] \geq 0\}, \\ \min \{(\bar{v}, \Delta c) \mid A^T u \geq c - \Delta c, [u, \Delta c] \geq 0\}.$$

Эти задачи всегда разрешимы. Если  $\bar{x}$  и  $\bar{u}$  — их оптимальные решения, то оптимально откорректированная модель, которая ставится в соответствие исходной (3), будет иметь вид

$$\max \{(c - \bar{\Delta}c, x) \mid Ax \leq b + \bar{\Delta}b, x \geq 0\}, \\ \text{где } \bar{\Delta}c = (c - A^T \bar{u})^+, \bar{\Delta}b = (A\bar{x} - b)^+.$$

Еще более общей формой параметризации является такая, когда параметризуется вся исходная информация о задаче:

$$\max \{(c - \Delta c, x) \mid (A + H)x \leq b + \Delta b, x \geq 0\},$$

т. е.  $\Delta = [\Delta b, \Delta c, H]$ . Коррекция в силу этой постановки при том или ином выборе функции  $\varphi(\Delta)$  качества коррекции является задачей довольно трудной, но преодолимой.

В связи с рассмотренными способами коррекции не собственных задач ЛП сделаем следующее добавление. В них, по существу, мы выбирали те или иные информационные подмножества, а именно:  $\{b_j\}$ ,  $\{b_j, c_i\}$ ,  $\{b_j, c_i, a_{ji}\}$  и за счет изменения показателей этих подмножеств (в силу тех или иных критериев оптимальности) осуществляли коррекцию исходной модели. На самом деле, если исходить из практических соображений, то, очевидно, какие-то показатели изменять можно, а другие нельзя. А если можно, то только в определенных пределах. Сказанное легко учитывается в рассмотренных способах коррекции.

Введем операцию поэлементного умножения матриц одинакового размера: если

$$C = \{c_{ji}\}, D = \{d_{ji}\},$$

то  $C \circ D = \{c_{ji} d_{ji}\}$ . Выделим подмножество  $I \subset \{b_j, c_i, a_{ji}\}$  тех показателей, за счет вариации которых мы намерены

осуществить коррекцию исходной модели. Образуем векторы:  $\bar{c} = [\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n]$ , где

$$\bar{c}_i = \begin{cases} 1, & c_i \in I, \\ 0, & c_i \notin I; \end{cases}$$

$\bar{b} = [\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_m]$ , где

$$\bar{b}_j = \begin{cases} 1, & b_j \in I, \\ 0, & b_j \notin I; \end{cases}$$

$\bar{A} = \{\bar{a}_{ji}\}$ , где

$$\bar{a}_{ji} = \begin{cases} 1, & a_{ji} \in I, \\ 0, & a_{ji} \notin I. \end{cases}$$

Положим,  $\Delta_c = \bar{c} \circ \Delta c$ ,  $\Delta_b = \bar{b} \circ \Delta b$ ,  $H_\Delta = \bar{A} \circ H$ , где  $H$  — параметрическая матрица размера матрицы  $A$ . Теперь параметризуем задачу (3) в форме

$$\begin{aligned} \max \{ (c - \Delta_c, x) \mid (A + H_\Delta) x \leq b + \Delta_b, \\ \underline{\Delta} \leq \Delta \leq \bar{\Delta}, x \geq 0 \}, \end{aligned}$$

где  $\Delta = [\Delta_c, \Delta_b, H_\Delta]$ ,  $\underline{\Delta}$  и  $\bar{\Delta}$  задают нижние и верхние значения для показателей из множества  $I$ . Понятно, что такой вид параметризации — более общий по сравнению с рассмотренными ранее.

Сделаем еще одно замечание, связанное с коррекцией несобственной задачи (3) через оптимальное варьирование вектора свободных членов  $b$ . В приложениях может случиться, что естественнее изменение вектора  $b$  через приращение  $\Delta b$  подчинить требованию  $\Delta b = t \bar{\Delta} b$ , где  $\bar{\Delta} b$  — вектор, задающий пропорции изменения приращения  $\Delta b$ , при этом некоторые из координат вектора  $\bar{\Delta} b$  могут быть нулевыми. Тогда коррекция ограничений задачи (3) примет вид:

$$\min \{ t(\bar{u}, \bar{\Delta} b) \mid Ax \leq b + t \bar{\Delta} b, [x, t] \geq 0 \}.$$

Некоторых других видов коррекции неразрешимых задач ЛП мы коснемся позже.

## Двойственность в несобственном линейном программировании

Рассмотрим вопросы, касающиеся проблемы двойственности для несобственных задач линейного программирования. Первоначальные сведения по коррекции несобственных моделей, которые были приведены выше, служат базой для формулировки принципа двойственности для несобственных задач ЛП и той схемы, которая кладется в основу реализации этого принципа. Важность принципа двойственности для несобственных задач оптимизации эквивалентна важности его в анализе разрешимых (собственных) задач. Двойственность позволяет более глубоко изучить исходный объект (исходную задачу), к тому же она является мощным генератором эффективных методов численного анализа.

Смысл схемы двойственности для несобственных задач ЛП состоит в следующем: паре взаимно двойственных задач линейного программирования  $L$  и  $L^*$  ставятся по единому правилу  $\pi$  в соответствие пары задач  $P$  и  $P^*$ , при этом последние разрешимы, связаны соотношениями двойственности и аппроксимируют (в том или ином смысле) задачи  $L$  и  $L^*$  соответственно. В указанной схеме символы  $(*)$  и  $(\#)$  означают правила формирования соответственно задачи  $L^*$  из  $L$  и  $P^*$  из  $P$ ; символ  $(*)\downarrow\uparrow$  означает свойство  $(L^*)^* = L$ ; символ  $(\#)\downarrow\uparrow$  означает  $(P^*)^* = P$  (свойство взаимной двойственности).

Выше под соотношениями двойственности понимаются два основных ее свойства:

1) если  $f(x)$  и  $g(u)$  — оптимизируемые функции прямой и двойственной задач, то выполняется неравенство  $f(\bar{x}) \leq g(\bar{u})$  для любых допустимых векторов  $\bar{x}$  и  $\bar{u}$  относительно ограничений этих задач;

2) если названные задачи разрешимы, то их оптимальные значения совпадают.

Эти соотношения как раз справедливы для разрешимых задач линейного программирования.

Существует довольно общая реализация приведенной выше схемы [1], мы же приведем только ее частные случаи.

Пусть  $R_j \geq 0$  ( $j = 1, \dots, m$ ),  $r_i \geq 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) — произвольные числовые параметры (неотрицательные). Выпишем задачи

$$P_0: \max \{(c, x) - (R, (Ax - b)^+) \mid 0 \leq x \leq r\},$$
$$P_0^*: \min \{(b, u) - (r, (c - A^T u)^+) \mid 0 \leq u \leq R\},$$

где  $R = [R_1, \dots, R_m]$ ,  $r = [r_1, \dots, r_n]$ . Обозначим  $f_R(x) = (c, x) - (R, (Ax - b)^+)$ ,  $f_r^\#(u) = (b, u) + (r, (c - A^T u)^+)$ . Для  $P$  и  $P^\#$  выполняются отмеченные соотношения двойственности:

- 1)  $f_R(\bar{x}) \leq f_r^\#(\bar{u})$  для всех  $0 \leq \bar{x} \leq r$  и  $0 \leq \bar{u} \leq R$ ;
- 2)  $\max_{0 \leq x \leq r} f_R(x) = \min_{0 \leq u \leq R} f_r^\#(u)$ .

При этом  $P$  и  $P^\#$  разрешимы при произвольных  $R \geq 0$  и  $r \geq 0$ . Эти свойства позволяют свести решение задач  $P$  и  $P^\#$  к решению системы неравенств:

$$f_r^\#(u) \leq f_R(x), \quad 0 \leq x \leq r, \quad 0 \leq u \leq R. \quad (18)$$

В системе первое неравенство является нелинейным, точнее, кусочно-линейным. Но ее можно эквивалентно переписать и в форме системы линейных неравенств, а именно:

$$\left. \begin{aligned} (b, u) + (r, \mu) &\leq (c, x) - (R, t), \\ Ax - b &\leq t, \quad c - A^T u \leq \mu, \quad [t, \mu] \geq 0, \\ 0 &\leq x \leq r, \quad 0 \leq u \leq R. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Эквивалентность систем (18) и (19) надо понимать в том смысле, что если  $[\bar{x}, \bar{u}]$  — решение системы (18), то при некоторых  $\bar{t} \geq 0$ ,  $\bar{\mu} \geq 0$  вектор  $[\bar{x}, \bar{u}, \bar{t}, \bar{\mu}]$  будет решением системы (19). И обратно. Следовательно, решив систему линейных неравенств (19), мы получим как решения задачи  $P_0$ , так и  $P_0^\#$ .

Сказанное выше относительно задач  $P_0$  и  $P_0^\#$  верно независимо от того, какого рода несобственность имеет место для задачи  $L$ . Более того, соотношения двойственности, связывающие задачи  $P_0$  и  $P_0^\#$ , верны и для случая, когда задача  $L$  (а вместе с ней и  $L^*$ ) разрешима. Такое замечание справедливо и для других реализаций общей схемы двойственности, которые рассматриваются ниже.

В системе ограничений задачи  $L$  (т. е. задачи (3)) выделим какую-нибудь совместную подсистему  $A_0 x \leq b^0$ ,  $x \geq 0$ . Оставшуюся часть запишем в виде  $A_1 x \leq b^1$ , т. е. объединение этих подсистем дает систему  $Ax \leq b$ ,  $x \geq 0$ ,

которая может быть несовместной. На ограничения подсистемы  $A_0x \leq b^0$  можно смотреть как на **директивные**, а на ограничения подсистемы  $A_1x \leq b^1$  — как на **факультативные**. Употребленные термины можно понимать в том смысле, что ограничения первой группы обязательны для выполнения, а второй — желательны. Если при этом  $L$  — несобственная 1-го рода, то в роли задач  $P$  и  $P^\#$  могут выступить

$$P_1: \max \{(c, x) - (R, (A_1x - b^1)^+) \mid A_0x \leq b^0, x \geq 0\},$$

$$P_1^\#: \min \{(b, u) \mid A^T u \geq c, u \geq 0, u^1 \leq R\}.$$

Здесь  $0 \leq R$  — вектор размерности числа строк в матрице  $A_1$ ;  $u^1$  — вектор этой же размерности, причем  $u = [u^0, u^1]$  (следовательно, вектор  $u^0$  имеет размерность числа строк матрицы  $A_0$ ).

Если вектор  $R \geq 0$  выбран так, что система ограничений в  $P_1^\#$  совместна, то задачи  $P_1$  и  $P_1^\#$  разрешимы и их оптимальные значения совпадают.

Аппроксимационный же смысл задачи  $P_1$  состоит в следующем. Положим,  $R = \gamma \bar{u}$ ,  $\bar{u} > 0$ ,  $\gamma$  — переменный скаляр. Если число  $\gamma$  достаточно велико, то задача  $P_1$  эквивалентна задаче

$$\max \{(c, x) \mid x \in \tilde{M}\}, \quad (20)$$

где  $\tilde{M}$  — оптимальное множество задачи

$$\min \{(\bar{u}, (A_1x - b^1)^+) \mid A_0x \leq b^0, x \geq 0\}. \quad (21)$$

Смысловая нагрузка задачи (21) состоит в том, что минимизируются невязки факультативных ограничений с весами  $\bar{u}_j > 0$ , формирующими вектор  $\bar{u}$ , на множестве, задаваемом директивными ограничениями, т. е. на множестве  $M_0 = \{x \geq 0 \mid A_0x \leq b^0\}$ . Если  $\alpha$  — оптимальное значение задачи (21), то ее оптимальное множество  $\tilde{M}$  задается системой неравенств

$$A_0x \leq b^0, x \geq 0, (\bar{u}, (A_1x - b^1)^+) \leq \alpha. \quad (22)$$

Эта система по своему смыслу аппроксимирует систему ограничений  $Ax \leq b, x \geq 0$  в задаче  $L$  в случае ее (системы)



несовместности. Так что задача (20)—это задача максимизации на аппроксимационном множестве  $\tilde{M}$ , задаваемом системой (22), т. е. (20)—та **компромиссная** модель, которой мы заменили исходную задачу  $L$  с несовместной системой ограничений. Если  $\tilde{x}$ —некоторое решение компромиссной задачи (20), то вектор  $(A_1\tilde{x}-b^1)^+$  есть вектор невязок для факультативных ограничений, директивные же ограничения этим вектором удовлетворяются точно. Это соответствует смыслу разбиения ограничений на директивные и факультативные.

Для определенной полноты приведем еще одну реализацию схемы двойственности на случай, когда  $L$ —несобственная 2-го рода, т. е. когда  $M = \{x \geq 0 \mid Ax \leq b\} \neq \emptyset$ ,  $M^* = \{u \geq 0 \mid A^T u \geq c\} = \emptyset$ :

$$P_2: \max \{(c, x) \mid Ax \leq b, 0 \leq x \leq r\},$$

$$P_2^#: \min \{(b, u) + (r, (c - A^T u)^+) \mid u \geq 0\}.$$

Здесь  $0 \leq r$ —вектор размерности числа столбцов матрицы  $A$ . Так же как и в случае задач  $P_1$  и  $P_1^{\#}$ , если вектор  $r \geq 0$  выбран так, что система ограничений в  $P_2$ , т. е. система неравенств  $Ax \leq b$ ,  $0 \leq x \leq r$ , совместна, то выписанная пара задач разрешима и их оптимальные значения совпадают. Это дает возможность их решение свести к решению системы неравенств

$$Ax \leq b, 0 \leq x \leq r, (r, (c - A^T u)^+) \leq (c, x), u \geq 0.$$

Аппроксимационный смысл задачи  $P_2^{\#}$  можно выявить по аналогии со случаем задачи  $P_1$ , т. е. вначале аппроксимируется несовместная система линейных неравенств  $A^T u \geq c$ ,  $u \geq 0$ , а потом на аппроксимационном множестве этой задачи ищется  $\min(b, u)$ .

## Другие методы поиска компромиссных моделей

Если математическая модель противоречива, то способов ее коррекции, т. е. приведения к разрешимому виду, можно предложить много. Некоторые из таких способов были рассмотрены. Однако конкретные реализации методов коррекции должны диктоваться характером конкретной задачи, которую мы моделируем, ее содержательным смыслом, иерархией **уступок** по тем или иным позициям, ха-

рактизирующим моделируемый объект (дефицитное и менее дефицитное оборудование, то же самое в отношении используемых ресурсов; жесткие плановые задания и менее жесткие и т. д.). Более того, сам практический опыт работы с противоречивыми моделями, поставленными в соответствие реальным экономическим объектам, может подсказать новые способы разрешения их противоречивости, устранения узких мест и т. д. Такой опыт необходимо накапливать.

Что касается общих методов коррекции противоречивых моделей, то на некоторых мы уже останавливались (методы параметризации, метод выделения групп директивных и факультативных ограничений, последние из которых масштабированно учитывались в целевой функции). Ниже мы рассмотрим способ последовательной коррекции, способ, основанный на понятии оптимума по Парето, и способ, связанный с обобщением понятия решения системы неравенств.

Рассмотрим задачу (3), ограничения  $Ax \leq b, x \geq 0$  которой противоречивы. Выделим из системы совместную подсистему  $A_0x \leq b^0, x \geq 0$  с множеством решений  $M_0 \neq \emptyset$ , а остальные ограничения разобьем на группы  $A_jx \leq b^j$  ( $j=1, \dots, s$ ), упорядоченные по важности. Для фиксированного номера  $j$  векторы невязок этих подсистем запишутся так:  $(A_jx - b^j)^+$  ( $j=1, \dots, s$ ). Введя масштабирующие векторы  $u^j > 0$ , можно образовать меры невязок для этих подсистем  $f_j(x) = (\bar{u}_j, (A_jx - b^j)^+)$  ( $j=1, \dots, s$ ). Теперь опишем, в чем состоит метод последовательной коррекции. Вначале решается задача

$$\min \{f_1(x) \mid A_0x \leq b^0, x \geq 0\} \quad (= \alpha_1).$$

Ее оптимальное множество  $\tilde{M}_1$  запишется системой неравенств

$$A_0x \leq b^0, x \geq 0, f_1(x) \leq \alpha_1.$$

Потом решается задача

$$\min \{f_2(x) \mid x \in \tilde{M}_1\} \quad (= \alpha_2)$$

и т. д. Наконец, приходим к задаче

$$\min \{f_s(x) \mid x \in \tilde{M}_{s-1}\}, \quad (23)$$

где  $\tilde{M}_{s-1}$  — оптимальное множество предыдущей задачи. В качестве компромиссной модели для (3) может быть

взята модель

$$\max \{(c, x) \mid x \in \tilde{M}\},$$

в которой  $\tilde{M}$  — оптимальное множество задачи (23).

Остановимся далее на методе коррекции по **Парето**. Избегая самого общего описания этого метода, возьмем предыдущую исходную ситуацию с совместной подсистемой  $A_0x \leq b^0$ ,  $x \geq 0$  и функциями  $f_j(x)$  ( $j = 1, \dots, s$ ); только будем считать, что они не упорядочены по важности. Запишем формально задачу минимизации по Парето

$$\min_{\pi} \{F(x) \mid A_0x \leq b^0, x \geq 0\}, \quad (24)$$

где  $F(x) = [f_1(x), \dots, f_s(x)]$ . Точку  $\tilde{x} \in M_0 = \{x \geq 0 \mid A_0x \leq b^0\}$  назовем  **$\pi$ -минимальной по Парето** (или  **$\pi$ -точкой**), если из  $\bar{x} \in M_0$  и  $F(\bar{x}) \leq F(\tilde{x})$  следует  $F(\bar{x}) = F(\tilde{x})$ , т. е. от  $\tilde{x}$  нельзя перейти к другой точке из  $M_0$ , уменьшив хотя бы одну координату вектора  $F(\tilde{x})$  и не увеличив какую-либо другую. Смысл задачи (24) и состоит в поиске всех  $\pi$ -точек. Если  $\Pi$ -множество всех  $\pi$ -точек задачи (24), то можно ввести задачу

$$\max \{(c, x) \mid x \in \Pi\},$$

последняя и выступает в качестве корректирующей для задачи (3) в соответствии с идеей Паретовской аппроксимации. Следует отметить, что конструктивное описание множества  $\Pi$  затруднительно, однако нахождение какой-либо его точки — задача простая. Для этого достаточно образовать функцию  $f(x) = \sum_{j=1}^s \lambda_j f_j(x)$  с коэффициентами  $\lambda_j > 0$  и решить обычную оптимизационную задачу

$$\min \{f(x) \mid x \in M_0\}.$$

Оптимальное множество этой задачи будет принадлежать множеству  $\Pi$ .

Метод, который кратко будет описан ниже, назовем методом **оптимизации на покрытиях**. Пусть система неравенств  $Ax \leq b$  разбита произвольным образом на подсистемы  $A_jx \leq b^j$  ( $j = 1, \dots, k$ ) так, что подсистемы  $A_jx \leq b^j$ ,  $x \geq 0$  совместны ( $j = 1, \dots, k$ ). Впрочем, можно допускать вхождения отдельных неравенств в разные подсистемы. Такую совокупность подсистем назовем **совместным покрытием** исходной системы  $Ax \leq b$ ,  $x \geq 0$ . В качестве подсистем могут выступать максимально (по числу неравенств) совместные

подсистемы. Положим  $M_j = \{x \geq 0 \mid A_j x \leq b^j\}$  ( $j = 1, \dots, k$ ). Каждая подсистема ослабляет ограничения исходной задачи (3), и иногда последнюю можно заменить на задачу  $\max \{(c, x) \mid x \in M_j\}$  при некотором  $j$ . Но при массовом принятии решений на основе модели (3) можно исходить из идеи **смешанной стратегии** использования **чистых стратегий** (планов)  $x^j \in M_j$ , что приводит к задаче

$$\max \left\{ \sum_{j=1}^k \alpha_j (c, x^j) \mid x^j \in M_j, \alpha_j \geq 0 \right. \\ \left. (j = 1, \dots, k), \sum_{j=1}^k \alpha_j = 1 \right\}.$$

Это только один из способов содержательной редукции задачи (3) с несовместной системой ограничений к задаче оптимизации на покрытиях. Существуют и другие реализации описанного подхода.

В заключение этого пункта коснемся вопроса о противоречивости задач принятия проектных решений, к которым могут быть применены описанные выше методы в той или иной их конкретизации или модификации. Пусть  $M$  — допустимое множество векторных описаний проектных решений, согласованное с ресурсными и технологическими ограничениями. Если  $f_1(x), \dots, f_k(x)$  — критериальные функции, оценивающие вектор  $x \in M$ , то для них может быть задана система их **желательных значений**  $\tilde{f}_i$  (ими могут быть «рекорды»), пусть в форме «не меньше». «Желательность» вместе с допустимостью порождает систему ограничений

$$f_i(x) \geq \tilde{f}_i \quad (i = 1, \dots, k), \quad x \in M.$$

Последняя практически всегда несовместна. К ее изучению можно подойти с **позиций несобственности** и методов ее анализа. Можно, например, по аналогии с (24) сформировать задачу

$$\min_{\pi} \{ \tilde{F}(x) \mid x \in M \},$$

где  $\tilde{F}(x) = [(\tilde{f}_1 - f_1(x))^+, \dots, (\tilde{f}_k - f_k(x))^+]$ , и подвергнуть анализу  $\pi$ -оптимальные решения ( $\pi$ -точки) этой задачи (с учетом, возможно, других критериев, не вошедших в список  $f_1(x), \dots, f_k(x)$ ). Можно критерии  $f_1, \dots, f_k$  «свернуть», образовав, например, функцию  $f(x) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (f_i - \tilde{f}_i(x))^+$ ,

где  $\lambda_i > 0$  ( $i = 1, \dots, k$ ), и решение искать согласно задаче

$$\min \{f(x) | x \in M\}.$$

Выбор функции-свертки может быть самым разным. Ее вид всякий раз должен быть подкреплён содержательными соображениями.

### Замечание относительно программного обеспечения

Коррекция противоречивой модели в случае ее обозримости может быть осуществлена разными и достаточно простыми способами. Когда же речь идет о моделях ЛП, содержащих тысячи ограничений и тысячи переменных, наивный подход (без теории, численных методов анализа и программного обеспечения) не может привести к положительным результатам, более того, он просто бессилён. Однако даже лучшие пакеты прикладных программ (ППП) по линейному программированию (как отечественные, так и зарубежные, например, MPSX-370) работают на отказ в случае, когда в задаче линейного программирования система ограничений несовместна, т. е. в этом случае выдается информация о несовместности системы ограничений, и только!

Понятно, что элементарным требованием к ППП оптимизации является заложенная в них возможность анализа и программной коррекции таких моделей. Но очевидность этого требования стала ясна только в последние годы. Некоторые возможности анализа противоречивых задач ЛП заложены в пакете ОПТИМА-2 [2], обширный набор возможностей предусмотрен в пакетах  $\Delta$ -ПЛАН-БЭСМ-6 и  $\Delta$ -ПЛАН-ЕС, разработанных в Институте математики и механики УНЦ АН СССР. Такого рода пакеты разрабатываются и в других организациях (Центральный экономико-математический институт, Сибирский энергетический институт и др.).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Еремин И. И. Противоречивые модели экономики.— Свердловск: Средне-Уральское книжное изд-во, 1986.—96 с.
2. Численный анализ решения задач линейного и выпуклого программирования.— Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1983.—168 с.



Вл. Д. Мазуров,  
доктор физико-математических наук

## ФОРМАЛЬНОЕ И НЕФОРМАЛЬНОЕ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ЗАДАЧ ПЛАНИРОВАНИЯ И ДИАГНОСТИКИ

Каждый человек вправе выбирать объекты, заслуживающие его удивления. Многих вполне обоснованно поражает, например, «непостижимая эффективность» математики. Правда, нам кажется, что нужно отметить следующее: с одной стороны, эта эффективность, возможно, не всеобъемлюща, а с другой — что это свойство эффективности математики в тех областях, где она сегодня применяется, не вызывает сомнений.

Между тем время от времени тот или иной автор вновь (и как будто впервые) открывает широкие возможности математического моделирования.

Здесь мы будем предполагать, что факт полезности применения математических моделей во многих ключевых вопросах науки и практики хорошо известен и не вызы-

вает сомнений. Однако высокий уровень этой полезности в каждом конкретном случае достигается не автоматически. Для достижения такого уровня требуется значительная творческая работа математика и специалиста в той области, где применяется математическое моделирование. В частности, необходимо учитывать феномен плохой формализуемости некоторых объектов моделирования и отыскивать математические средства учета плохо формализуемых факторов [1, 2, 4, 5].

Проблема достижения необходимой отдачи от применения математического моделирования связана по крайней мере с двумя следующими вопросами:

— какой может быть степень автоматизируемости процесса математического моделирования реальных объектов и ситуаций;

— какова возможная степень формализации описания объектов и ситуаций.

При всем нашем желании максимальной автоматизации интеллектуальной деятельности, связанной с обработкой практической информации, следует иметь в виду, что процесс математического моделирования в принципе неформализуем; в противном случае полезность этого процесса была бы весьма ограниченной.

Тем не менее следует как можно больше насыщать процессы моделирования, процессы принятия решений формальными логическими и вычислительными процедурами, так как подобный инструментарий может обеспечить большую объективность, обоснованность и эффективность решения практических задач.

В данной статье рассматривается понятие плохо формализуемой задачи, методы решения таких задач, приводятся примеры использования этих идей в решении некоторых практических проблем в экономике, технике и медицине.

## Понятие плохо формализуемой задачи

В настоящее время сфера приложений математики существенно расширилась: решаются не только задачи техники и физики, как в основном было в начале века, но и задачи экономики, социологии, биологии, медицины. Это потребовало создания новых методов и совершенствования имевшихся. Да и в старых, традиционных для математики областях приложений задачи значительно усложнились,

приобрели такие качества, как большая размерность, большая расплывчатость постановки, неопределенность информации и т. д.

В постановке задач появились неклассические моменты, такие, как плохая формализуемость, нестационарность, противоречивость.

Обратимся к понятию плохо формализуемой задачи, которое выкристаллизовывается в результате решения потока серьезных прикладных задач в самых различных областях. Для обсуждения этого понятия необходимо коснуться вопроса о том, что вообще представляет собой математическая модель.

Математическая модель — понятие очень широкое. Сюда включаются всевозможные математические конструкции, в том числе и весьма высокой степени абстракции. Эти конструкции могут включать и формализованные правила рассуждений, и правила логического вывода. Понятно, что математические модели служат отражению и анализу некоторых свойств действительных объектов. Опишем подробнее один из видов математических моделей, характеризующихся простой структурой и широко применяющихся в приложениях. Модели названного вида содержат следующие элементы:

1) вектор  $x$  параметров, измеряемых на объекте:  $x = [x_1, \dots, x_n]$ , где  $x_i$  — значение  $i$ -го параметра, которое является чаще всего вещественным числом. Можно назвать  $x$  вектором состояния объекта. Если изучается динамика моделируемого объекта во времени  $t$ , то считаем, что состояние в каждый момент  $t$  описывается вектором

$$x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)];$$

2) вектор  $y(t)$  параметров, не могущих быть непосредственно измеренными;

3) известные связи между переменными координатами векторов  $x(t)$  и  $y(t)$ ;

4) связи между переменными, являющиеся неизвестными;

5) математический аппарат исследования соотношений (связей), упомянутых в пунктах 3 и 4.

В качестве примера можно привести имитационные модели, описывающие возможные пути развития сложных технико-экономических и природных систем; эти модели представляют собой своеобразные «машины времени».

Поясним теперь, что мы понимаем под плохо формализуемыми задачами: это задачи, условия которых опре-



делены не полностью, не все связи заданы в аналитической форме, при этом формулировка задачи может содержать противоречия, а также не все соглашения о понятии решения могут быть в наличии.

Решению таких (плохо формализуемых) задач предшествуют этапы преобразования их формулировки, уточнений и упрощений. Результатом этих этапов является получение комплекса формализованных задач, имеющего некоторое отношение к исходной задаче. Необходимо знание этого отношения, иначе точность, достигаемая формальными методами, может оказаться бесполезной.

В сферу модели естественно также включить описание исходной задачи, выбираемый язык, критерии и ограничения, аппарат оценки адекватности модели, средства интерпретации и подготовки к практическому внедрению, способы немодельного анализа, учета плохо формализуемых факторов.

Можно выделить следующие разновидности плохо формализуемых задач:

1) нестационарные; эти задачи отличаются эволюцией информации об объекте и модельных представлений о нем [1];

2) задачи с расплывчатым отражением некоторых зависимостей и плохо определенными ограничениями. В этих задачах для описания зависимостей и ограничений требуется использовать специальные процедуры диалога с экспертами, а также проведение целенаправленных серий экспериментов [1];

3) с несовместными системами условий и ограничений и неопределенным понятием решения (несобственные задачи [2]);

4) задачи, в которых оценка решения производится по системе несогласованных (противоречивых) критериев;

5) задачи с неоднозначно определенным решением;

6) неустойчивые или некорректные задачи [3].

## Противоречивые модели

Противоречивые знаковые модели возникают и в эмпирических исследованиях, и в формально-логических. Поэтому необходимо использовать обобщения понятия существования решения, применять «размытые» определения и принципы принятия практических решений, вводить обобщения

понятия непротиворечивости теоретической модели. Так, например, некоторые логические парадоксы могут быть связаны с несовместными системами предикатов, которым можно поставить в соответствие лишь несобственные объекты. Один из путей снятия таких парадоксов — в расширении представлений об объектах, в ослаблении накладываемых при определении объекта требований, в их «размывании», в расширении смысла понятия существования объекта.

Противоречивые определения объектов и противоречивые модели иногда возникают в результате абсолютизации локальных свойств действительно существующих объектов. Другая возможная причина появления противоречивых моделей — наличие различных несогласованных источников информации, которая служит основой моделирования. Далее, некоторые объекты могут проявлять определенные свойства случайно, с какой-то вероятностью, а в модели мы пытаемся записать эти свойства как постоянно имеющие место, и тогда мы тоже можем получить несовместную систему утверждений. Противоречия возникают и в «стыковочных» моделях, привлекающих соображения из различных научных областей. Источником противоречий может быть и то, что разные люди вкладывают разный смысл в одни и те же термины.

В математике сейчас наблюдается заметный интерес к описанию противоречивых ситуаций, причем и сами эти описания — знаковые системы — могут быть противоречивыми. В прикладной математике этот интерес, по-видимому, вызван необходимостью повысить реальный результат применения математических моделей и методов к решению сложных практических задач. Здесь возникает вопрос о том, каким образом можно корректно и обоснованно работать с противоречивыми знаковыми системами, конструируемыми исходя из содержательных представлений о сложных реальных объектах. Примеры решения противоречивых (несобственных) задач сейчас можно привести и в сфере оптимизации, и в сфере распознавания образов, и в некоторых других областях математики. Отметим, что в Институте математики и механики развивается достаточно широкая программа математического исследования несобственных задач, разработки их алгоритмического и программного обеспечения.

Заметим, что правила работы с противоречивыми моделями должны быть заранее оговорены и обоснованы, так

как из противоречивой системы соотношений могут быть выведены в качестве формальных следствий противоположные друг другу высказывания. В некоторых случаях содержательный смысл модели может диктовать такой вид работы с ней, как выделение ее непротиворечивых подмоделей, в других случаях возможно ослабление ограничений модели, приводящее к ее непротиворечивости.

Действительно, если некоторый реальный объект должен функционировать при противоречивой системе ограничений и при несогласованных критериях (а такие ситуации встречаются в экономическом планировании, при техническом проектировании и в других случаях), то для него может быть выбран, например, один из следующих двух способов поведения: либо приближенно учитывать все ограничения (точное удовлетворение им невозможно в силу условия противоречивости), и тогда будем говорить о непрерывной аппроксимации несобственной модели, либо точно отражать и учитывать сначала одну группу требований, затем другую и т. д., получая последовательность дискретных состояний. Во втором случае можно говорить о дискретной аппроксимации, понятие о которой формализуется, например, на пути использования  $p$ -комитетов [6]:  $p$ -комитет системы ограничений

$$x \in M_j \quad (j = 1, \dots, m)$$

есть конечное множество  $K$  такое, что всякому ограничению удовлетворяет более чем  $p$ -я часть из числа всех элементов множества  $K$ .

Здесь приведено определение  $p$ -комитета для системы ограничений в абстрактной форме. Поясним смысл этого определения для более конкретных систем в частном случае, когда  $p = \frac{1}{2}$ .

Если  $p = \frac{1}{2}$ , то  $p$ -комитет называется комитетом или комитетом большинства (отметим, кстати, что существуют и другие виды комитетов, моделирующие другие способы принятия коллективных решений,— это комитеты старшинства, комитеты единогласия и т. д.).

Итак, пусть требуется, чтобы вектор  $x = [x_1, \dots, x_n]$  как вектор состояния некоторого объекта (технического, экономического, биологического или иного) удовлетворял системе условий:



та «Логика. Пособие к лекциям» [12]. В ней, в частности, при обсуждении критерия истинности знания указывается, что вопрос об истинности распадается на следующие два: существует ли всеобщий материальный критерий истинности; существует ли всеобщий формальный критерий истинности.

Далее показано, что всеобщий материальный критерий истинности невозможен.

Что же касается всеобщих формальных критериев, то таковые существуют. «Ибо формальная истинность состоит всего лишь в согласии знания с самим собою, при полном отвлечении от всяких объектов вообще и от всех их различий... Эти формальные общие критерии, конечно, недостаточны для объективной истины, но их, однако, следует считать за ее *conditio sine qua non* (необходимые условия).

Ибо вопросу, согласуется ли знание с объектом, должен предшествовать вопрос — согласуется ли оно (по форме) с самим собою? А это и есть дело логики.

Формальными критериями истинности в логике являются:

- 1) закон противоречия;
- 2) закон достаточного основания.

Первым определяется логическая возможность знания, вторым — логическая действительность знания.

Именно к логической истинности знания относится:

во-первых, то, что оно логически возможно, т. е. не противоречит самому себе. Но это — лишь отрицательный признак внутренней логической истинности, ибо хотя противоречащее себе знание ложно, однако и не противоречащее себе знание не всегда истинно;

во-вторых, то, что оно логически обосновано, т. е. что оно: а) имеет основание и в) не имеет ложных следствий».

Имеется определенная связь идеи выделения непротиворечивых подмоделей математической модели с физическим принципом дополнительности. Нам кажется, что эта связь может быть хорошо прослежена по одному высказыванию В. Паули [14]: «Надеюсь, что мне удалось дать понятие о возможностях синтеза с помощью идеи дополнительности, позволяющей оперировать с противоположными понятиями без противоречий благодаря принципиальному ограничению областей этих понятий».

Очевидно, что метод выделения совместных (непротиворечивых) систем соотношений математической модели может быть представлен как развитие приведенного рассуждения В. Паули.

## Плохо формализуемые и противоречивые задачи распознавания образов

Проблема распознавания образов состоит в выработке понятия о классе объектов, сходных друг с другом в каком-либо отношении, в выработке — на основе прецедентов — правила классификации объектов.

Неожиданно простые, изящные и в то же время хорошо отражающие суть дела математические модели для столь глубокой и трудной проблемы, как распознавание образов, появились в 50-х годах. Эти качества названных моделей, их простота и в то же время нерутинность, нетривиальность дали методам распознавания образов широкие возможности применения. С появлением моделей распознавания образов возникло более общее, фундаментальное и ясное понимание идеи распознавания образов, идеи диагностики и узнавания, ее сведение к логической основе — идее классификации, к операции разделения множеств. Именно эта общность взгляда позволяла математическим методам распознавания образов успешно внедриться в самые различные области науки и техники. В приложениях использовалось, в частности, то обстоятельство, что распознавание образов — это способ обобщения данных наблюдений и экспериментов, способ формирования машинной интуиции, метод самообучения алгоритмов.

Сейчас много говорится о той большой роли, которую сыграют методы распознавания образов в будущем, в частности при создании интеллекта новых машин [7]. При этом в основном имеется в виду узнавание сигналов и интерпретация сцен. Нам кажется, что следует ориентироваться и на другую сторону формирования интеллекта, а именно наряду с созданием средств логического вывода ЭВМ нужны аналоги интуитивного вывода, ассоциативного мышления, реализуемых на основе распознавания образов. В связи с этим отметим, что опыт создания математического и программного распознавания образов в Институте математики и механики УНЦ АН СССР, опыт эксплуатации и внедрения в различных организациях пакета КВАЗАР позволяют высказать некоторые положительные суждения о возможности применения методов распознавания образов как некоторых блоков накопления интуиции в вычислительных алгоритмах. Вообще при наличии в настоящее время большого числа пакетов прикладных программ, обслуживающих различные предметные области, актуален

вопрос об организации систем пакетов, наделенных как формальным интеллектом, так и средствами ассоциативного мышления.

В Институте математики и механики исследование проблем распознавания образов ведется на основе метода комитетов. Создана соответствующая теория дискриминантного анализа, таксономии, поиска информативных признаков, разработаны методы решения этих задач, реализованные В. С. Казанцевым и другими в пакете КВАЗАР. Решено много практических задач. Пакет сдан в Госфонд алгоритмов и программ, передан многим организациям. Далее коснемся содержания метода комитетов и дадим краткую характеристику пакета КВАЗАР [8].

## Дискриминантный анализ и метод комитетов

Основная задача распознавания образов — задача дискриминантного анализа — состоит в следующем.

Требуется выработать представление о том, чем отличаются объекты одного класса (образа) от объектов другого класса. Это представление должно быть получено на основе примеров объектов разных классов. При этом описание отличия объектов разных классов друг от друга должно быть выражено в виде некоторых математических соотношений. Эту постановку задачи можно проиллюстрировать следующей типичной ситуацией из области медицинской диагностики.

Пусть поставлена цель: обучить студентов-медиков правильно ставить диагноз заболевания, не объясняя, чем отличаются внешне проявления этих заболеваний, а просто показывая примеры больных с указанием соответствующей болезни. В результате ознакомления с достаточно большим числом больных у способного студента выработается достаточное для практического использования интуитивное правило (которое он, возможно, не может выразить формально) различения больных разных классов.

Оказывается, центральную идею такого рода процедуры «обучения на примерах» можно довольно просто описать математически, что позволяет разрабатывать программы обучения ЭВМ распознаванию образов.

В случае, если число классов (образов) равно двум, эту процедуру обучения распознаванию образов можно описать следующей моделью. Заданы множества  $A$  и  $B$  в  $n$ -мерном векторном пространстве  $R^n$ . Обычно эти мно-

жества конечны и заданы перечислением их элементов. Требуется найти функцию  $f(x)$   $n$ -мерного вектора  $x$ , разделяющую множества  $A$  и  $B$ ; при этом функция  $f(x)$  выбирается в определенном классе  $F$  функций. Следовательно, для определения функции  $f(x)$  нужно решить систему ограничений на эту функцию:

$$f(x) > 0 \quad (x \in A), \quad f(x) \leq 0 \quad (x \in B), \quad f \in F. \quad (1)$$

Решение  $f$  этой задачи позволяет относить произвольный элемент  $y \in R^n$  к одному из двух классов (образов): либо к тому, представителями которого являются элементы множества  $A$ , либо к классу, представляемому множеством  $B$ . Эта классификация делается по знаку числа  $f(y)$ :

$$y \text{ принадлежит } \begin{cases} \text{первому классу, если } f(y) > 0; \\ \text{второму классу, если } f(y) \leq 0. \end{cases}$$

В модели дискриминантного анализа важно уметь угадать подходящий класс  $F$  функций  $f(x)$ . Этот класс не должен быть слишком широким, так как опыт показывает, что в этом случае имеет место плохая интерпретируемость решения задачи (1), т. е. получается неинтересная для практики классификация элементов пространства  $R^n$ . С другой стороны, класс не должен быть слишком узким, чтобы система (1) обладала решением. Выбор класса  $F$  — трудоемкая задача.

Метод комитетов позволяет снять вопрос о выборе класса  $F$ , так как он по самой идее предназначен для анализа несовместных задач. В основе этого метода лежит следующее понятие, реализующее идею консилиума решающих правил диагностики.

**Определение.** Комитетом системы (1) называется такое конечное множество функций класса  $F$ :  $K = \{f_1, \dots, f_q\} \subset F$ , что каждому неравенству системы удовлетворяют более половины из функций этого множества.

Успешность применения метода комитетов связана, в частности, со следующим фактом [6]. Оказывается, для существования комитета аффинных функций системы (1), в которой множества  $A$  и  $B$  конечны, необходимо и достаточно, чтобы  $A \cap B = \emptyset$  [6].

Методы нахождения комитета аффинных функций для системы (1) позволили решать многие теоретические и практические задачи распознавания образов; этому во многом способствовало создание пакета КВАЗАР.



Пакет КВАЗАР в нескольких модификациях разработан для ЭВМ БЭСМ-6 и ЭВМ серии ЕС. Он предназначен для целей прогнозирования, диагностики, классификации и управления на основе методов распознавания образов и многомерной статистики. Пакет решает задачи обучения распознаванию образов по прецедентам, задачи автоматической классификации, задачи выбора информативных признаков, регрессионного анализа, расчета некоторых статистических характеристик массива данных.

## Распознавание образов как блок обучения вычислительных алгоритмов

Распознавание образов как модель интуитивного выбора решений применяется при выборе вида вычислительных методов, идентификации информационного отображения реальных объектов, при выборе констант численных методов и управления ими, при моделировании плохо формализуемых зависимостей.

Правила, в соответствии с которыми в ходе решения задачи вычислительной математики производится обращение к тому или иному блоку алгоритма или программы, не всегда удается формализовать. В этом случае можно использовать методы распознавания образов. Например, в задачах условной или безусловной минимизации функций с помощью распознавания образов можно выбирать метод минимизации, распознавать момент переключения с одного метода на другой, управлять настройкой констант вычислительного процесса (длиной шага и др.). При таком подходе ЭВМ сначала решает несколько задач данного класса и на этом материале «учится» достаточно эффективно решать задачи такого класса.

Эта идеология хорошо приспособливается к использованию в итерационных методах. Действительно, управление итерационными процессами счета, основанное на точных утверждениях о свойствах последовательности приближений к решению, часто оказывается неэффективным. Поэтому во многих случаях организация процедур счета опирается на эвристические соображения и интуицию, возникающие при решении большого числа задач определенного класса. Однако эффективность счета может быть существенно повышена, если снабдить программы средствами самообучения

управлению параметрами численных процедур, такими, например, как распознавание образов.

Пусть  $x^{t+1} = \varphi[p](x^t)$  — некоторый итерационный процесс, заданный с помощью итерационного оператора  $\varphi[p]$ , зависящего от векторного параметра  $p \in R^n$ . В качестве координат вектора  $p$  могут выступать константы точности, константы метода (например, штрафные константы — в методе штрафных функций, шаговый коэффициент — в методах субградиентного спуска, коэффициент инерции — в «методе тяжелого шарика» и т. д.). В работах [9, 10] рассматриваются приемы формализации управления последовательностью  $\{p^t\}_{t=0}^\infty$  с целью повышения качества вычислительного процесса

$$x^{t+1} = \varphi[p^t](x^t)$$

в условиях, когда признаки (характеристики) процесса, по которым вырабатываются управления  $p^t \xrightarrow{u_t} p^{t+1}$ , могут быть косвенными или плохо формализуемыми. Управление  $u_t$  может состоять в переключении с одного вида отображения  $\varphi_i$  на другой  $\varphi_j$ ; оно может быть как детерминированным, так и стохастическим (например, может настраивать на смешанную стратегию выбора отображения из некоторой фиксированной их совокупности, вырабатывать значения для субъективных констант счета).

## Распознавание образов как метод решения плохо формализуемых задач

Итак, мы видим, что распознавание образов дает нам средства управления вычислительными процессами, когда модель исследуемого реального объекта уже имеется. Однако можно пойти еще дальше, применив распознавание образов уже на стадии процесса моделирования с целью учета факторов, плохо поддающихся аналитическому описанию.

Такого рода процессами мы занимались на материале моделей математического программирования [11]. А именно с помощью распознавания образов моделировались плохо формализуемые ограничения и целевые функции в таких задачах. Суть этого подхода состоит в том, что строится алгоритм, который «учится» распознавать допустимость вектора по плохо формализуемым ограничениям на основе примеров допустимых и недопустимых векторов. Подобная

техника, позволяющая, в частности, автоматизировать поиск эмпирических закономерностей, относится к нестационарным процессам математического программирования, которым посвящена книга [1].

Примером практического использования может служить применение пакета КВАЗАР к формированию карт заказов в задаче объемно-календарного планирования машиностроительного производства.

Метод комитетов позволяет анализировать плохо формализуемые и противоречивые задачи как распознавания образов, так и математического программирования. В задачах оптимизации понятие комитета дает один из способов обобщения понятия решения. Это понятие используется в задачах планирования при недостаточных ресурсах, в несовместных транспортных задачах, в противоречивых задачах выбора вида лечения и в других.

Метод комитетов может применяться в решении противоречивых задач поиска, анализа и интерпретации данных. Последние моделируются в виде систем отношений, которые могут быть несовместными. Соответствующие непротиворечивые подсистемы данных могут быть найдены с помощью построения комитетных решений, выделения максимальных совместных подсистем исходной системы соотношений. Таким образом, может быть, например, найдена интерпретация противоречивых 2-мерных представлений  $n$ -мерных сцен.

Распознавание образов позволяет осуществлять выбор решений в различных областях практики при плохо формализуемых требованиях к выбираемому решению. В настоящее время методами распознавания образов успешно решаются задачи диагностики медицинских, технических и других объектов, задачи технико-экономического планирования, управления и проектирования при плохо формализуемых факторах, задачи прогнозирования, нахождения эмпирических зависимостей и сжатия данных.

Так например, если требуется получить решающее правило выбора вида управления  $u \in U$  в производственной ситуации  $x \in X$ , то это правило может быть найдено в результате применения процедуры обучения по прецедентам. При этом качество работы указанного правила улучшается по мере накопления множества прецедентов, иными словами, по мере расширения материала обучения.

Материал обучения в случае конечного множества  $U$  управлений имеет следующий вид.

Для некоторых производственных ситуаций  $x \in X$  указаны наилучшие в этих ситуациях управления  $u(x)$ . Пусть  $U = \{u_1, \dots, u_m\}$ . Положим  $X_i = \{x \in X : u(x) = u_i\}$ . Предполагается, что материал обучения  $A \subset X$  таков, что  $A_i = A \cap X_i \neq \emptyset$  ( $i = 1, \dots, m$ ).

В этом случае можно решить задачу дискриминантного анализа: найти разделяющие функции  $f_1(x), \dots, f_{m-1}(x)$  такие, что функция  $f_j(x)$  класса  $F$  отделяет множество  $A_j$  от множества  $\bigcup_{i>j} A_i$ :

$$\left. \begin{aligned} f_j(x) &> 0 \quad (x \in A_j), \\ f_j(x) &\leq 0 \quad (x \in \bigcup_{i>j} A_i), \\ f_j(x) &\in F. \end{aligned} \right\}$$

Тогда для любой новой ситуации  $y \in X$ , не входящей в материал обучения, можно определить прогноз наилучшего управления:

$$u(y) = u_i, \text{ где } i = \min \{j : f_j(y) > 0\};$$

если  $f_j(y) \leq 0$  ( $j = 1, \dots, m-1$ ), то  $u(y) = u_m$ .

Приведем пример задачи выбора управлений из области медицины: рассмотрим задачу выбора процедуры лечения больного.

Пусть  $x = [x_1, \dots, x_n]$  — вектор характеристик состояния больного до лечения,  $y = [y_1, \dots, y_m]$  — вектор параметров процедуры лечения. Предположим, что  $j$ -я характеристика состояния больного после лечения имеет вид:  $f_j(x, y)$ , причем требования к выбираемой процедуре лечения состоят в том, чтобы все характеристики после лечения были в пределах нормы:

$$a_j \leq f_j(x, y) \leq b_j \quad (j = 1, \dots, m).$$

Если вектор состояния  $x$  фиксирован, то выбор лечения заключается в решении этой системы относительно вектора  $y$ . Однако на практике эта задача часто бывает плохо формализуемой. А именно некоторые из зависимостей  $f_j(x, y)$  могут быть неизвестными. Кроме того, система двусторонних ограничений может быть несовместной.

Неизвестные закономерности могут быть учтены с помощью распознавания образов. Противоречивость системы ограничений можно обойти, используя последовательность решений максимальных совместных подсистем.

## Использование математических методов и ЭВМ в медицине

Среди практических задач, решаемых в Институте математики и механики Уральского научного центра АН СССР, заметное место занимают задачи медицины. Эти задачи, решаемые в сотрудничестве с рядом медицинских учреждений Свердловска, требуют применения самых современных математических средств, разрабатываемых в институте,— теоретических исследований, вычислительных методов, приемов моделирования объектов и явлений, пакетов прикладных программ на ЭВМ БЭСМ-6 и ЕС-1060 [15].

Нужно сказать, что задачи медицины оказались очень трудными. Прежде всего трудной является их запись на языке математических моделей. Дело в том, что математическое моделирование может приносить в данном случае существенную практическую пользу только при условии достаточно полного и правильного учета процессов, происходящих в человеческом организме.

Тем не менее математикам удалось в сотрудничестве с медиками получить полезные практические результаты. Эти результаты были недавно предметом обсуждения на заседании Президиума Уральского научного центра, на которое были приглашены видные специалисты— медики города, руководители и научные сотрудники медицинских учреждений, профессора кафедр медицинского института.

Математический аппарат решения медицинских задач в ИММ основан на разрабатываемых в институте методах исследования операций, теории управления, вычислительной математики. Используются модели управления эволюцией объектов и процессов, методы распознавания образов для задач классификации и диагностики, а также процедуры автоматизации сбора информации и ввода ее в ЭВМ.

Автоматизацию математической обработки результатов экспериментальных наблюдений, а также некоторых вычислительных процессов решения медицинских задач обеспечивают разработанные в ИММ пакеты прикладных программ, среди которых можно назвать пакет КВАЗАР. Это пакет решения задач классификации, диагностики и прогнозирования на основе методов распознавания образов, факторного анализа и математической статистики.

Следует отметить, что пакеты программ достаточно универсальны, они могут применяться и применяются в ре-

шении не только медицинских задач, но и в задачах естествознания, техники, экономики и социологии.

В пакете КВАЗАР реализованы математические методы распознавания образов, разработанные в ИММ (в том числе метод комитетов, позволяющий строить сложные решающие правила диагностики), эти методы обеспечивают прохождение большого числа задач диагностики, решаемых в институте.

Медицинские задачи в ИММ начали решаться в 1970 г., отдельные — несколько раньше. Первые работы велись в содружестве с профессором Д. Г. Шефером и его учениками: кандидатом медицинских наук В. Л. Гуревичем и другими. Это работы по диагностике нарушений мозгового кровообращения.

Далее последовали работы с облонкодиспансером в сотрудничестве с профессором А. И. Мезенцевым и его учениками по диагностике некоторых онкологических заболеваний.

Затем начались работы по моделированию процессов кинетики, прогнозированию состояний организма, по автоматизации сбора информации и ее ввода в ЭВМ.

Сейчас ИММ имеет связи по договорам с облздравотделом, областным медицинским ИВЦ, онкодиспансером, ОММ, Институтом гигиены труда и профзаболеваний, Институтом курортологии и физиотерапии, Институтом вирусных инфекций, Институтом травматологии и другими.

Имеется и такая форма участия ИММ в медицинской тематике, как факультет «Математические методы в медицине и биологии» общественного университета ИММ. Он работает с 1978 года. Сейчас в институте работает также городской семинар по применению математических методов в медицине.

В сотрудничестве с названными выше и другими медицинскими учреждениями города решались следующие задачи: диагностики инсультов и некоторых онкологических заболеваний; нахождения области риска онкологических заболеваний; прогноза исхода родов; оценки влияния ряда социально-производственных факторов на продолжительность стажа шахтеров и на возникновение профессиональных заболеваний; моделирования кинетики фтора и управления накоплением фтора в организме; создания системы автоматического анализа электрокардиограмм на ЭВМ; определения влияния загрязненной промышленными отходами среды на здоровье подростков.

Разработанная в ИММ система автоматического анализа электрокардиограмм (ЭКГ) представляет собой комплекс технических и программных средств, предназначенных для обследования пациентов в поточном режиме, т. е. для массовых обследований. При анализе ЭКГ в целях кардиоскрининга необходимо определить параметры ЭКГ и сделать их оценку, отнеся данную ЭКГ к одной из трех групп: норма, граница нормы и патология.

За время обследования в ЭВМ записываются около четырех комплексов ЭКГ. В каждом отведении определяются 24 характерные точки, характеризующие форму ЭКГ. «Координаты» этих точек позволяют определить 32 параметра ЭКГ, подлежащих анализу. Цель анализа — отнесение ЭКГ к одной из названных выше групп.

Система реализована на ЭВМ типа ЕС. Электрокардиосигналы снимаются с пациента при помощи стандартных датчиков и после аналого-дискретного преобразования поступают в память ЭВМ.

Следует, нам кажется, более подробно остановиться на роли банков медицинских данных, ведущих на ЭВМ.

Если взглянуть на деятельность медицинских работников (как лечащих врачей, так и сотрудников организаций здравоохранения) под углом зрения, несколько отличающимся от обычного, то можно обнаружить, что существенную часть трудового процесса этих людей составляют сбор и переработка информации. По данным американского ученого Пората, до 50% времени затрачивает врач на информационную деятельность. Качество лечебного процесса находится в прямой зависимости от количества имеющейся в распоряжении врача информации о больном, методах и средствах лечения, имеющихся медикаментах и аппаратуре. Однако к сожалению, возможности человека в переработке информации ограничены, и это является существенным препятствием в повышении качества лечения и использовании накопленного опыта.

Именно в этой сфере — накопления и обработки информации — ЭВМ могут стать и, несомненно, станут главными помощниками медицинских работников.

Банки данных в медицине можно использовать в трех основных направлениях:

1. В системах автоматизированной диагностики, уточнения диагноза, различного рода системах-советчиках, в информационно-справочных системах.

2. В управлении лечебными организациями и системами здравоохранения.

3. В документальных информационно-поисковых системах, предназначенных для обеспечения информацией различных категорий пользователей—врачей, работников НИИ, административно-управленческого персонала.

Создание и использование баз данных для целей диагностики—задача достаточно сложная. Главная сложность здесь в том, что необходимо формализовать основной документ, отражающий объективные характеристики состояния больного,—историю болезни. Однако если такая система создана, то она позволяет реализовать ряд дополнительных возможностей: определение корреляции между различными факторами, отражающими состояние больного, выделение прогностических индикаторов, сравнение различных методик лечения болезни.

Врач, столкнувшись со сложной ситуацией при диагностике, может обратиться к такой системе за помощью в идентификации больных, которые раньше находились в аналогичном клиническом состоянии, и узнать, как на них влияли те или иные методы лечения или препараты. Такие системы помогут избежать ошибок, обусловленных так называемым эпизодическим опытом, т. е. ошибок, возникающих в тех случаях, когда врач основывается в своих решениях главным образом на собственном опыте ведения одного-двух больных с редко встречающимися заболеваниями или симптомокомплексом.

Использование технологии баз данных дает возможность создавать автоматизированные системы управления медицинскими учреждениями. Небольшая мини-ЭВМ, установленная в стационаре, позволяет оперативно управлять ресурсами больницы—вести учет свободных коек и помещений, информировать о наличии медикаментов и предупреждать о снижении их количества ниже допустимого уровня, вести учет персонала различных категорий, автоматизировать финансовую, плановую деятельность и медицинскую статистику.

\* \* \*

Математическое программирование и распознавание образов дают эффективные средства моделирования, анализа и оптимизации технико-экономических и природных



систем. Однако в настоящее время приходится иметь дело с такими факторами, как расширение сферы математического моделирования, сложность решаемых задач, увеличение объема требующих учета неопределенных и плохо формализуемых характеристик изучаемых объектов. Эти обстоятельства заставляют сокращать относительный объем используемых формально-аналитических методов за счет эвристических процедур, имитационного моделирования и т. д. Однако формальная основа, математическое обоснование играют по меньшей мере упорядочивающую роль. На этой основе сейчас создаются средства решения задач, в которые включается и количественный, и качественный анализ. В настоящей статье продемонстрированы некоторые приемы, позволяющие увеличить гибкость и практическую приложимость ряда методов моделирования.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Еремин И. И., Мазуров Вл. Д. Нестационарные процессы математического программирования.— М.: Наука, 1979.
2. Еремин И. И., Мазуров Вл. Д., Н. Н. Астафьев. Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования.— М.: Наука, 1983.
3. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. [Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1979.
4. Моисеев Н. Н. Кибернетическое описание эколого-экономических систем.— Кибернетика, 1977.— № 6.
5. Журавлев Ю. И. Алгебры над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов.— ДАН СССР, 1977.— 235.— № 4.
6. Мазуров Вл. Д. Методы математического программирования и распознавания образов в планировании производства.— В кн.: Математические методы планирования промышленного производства.— Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1977.— № 22.
7. Мото-Ока Т. (ред.). ЭВМ пятого поколения.— М.: Радио и связь, 1984.
8. Казанцев В. С. Пакет КВАЗАР прикладных задач распознавания образов.— В кн.: Планирование горно-металлургического производства (программы оптимизации).— Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1977.— № 7.
9. Мазуров Вл. Д. Распознавание образов как средство автоматического выбора процедуры в вычислительных методах.— Журн. выч. мат. и мат. физ., 1970.— Т. 10,— № 6.

10. Еремин И. И., Мазуров Вл. Д. Автоматизация управления параметрами итерационного процесса для задач математического программирования.— Кибернетика, 1979,— № 6.

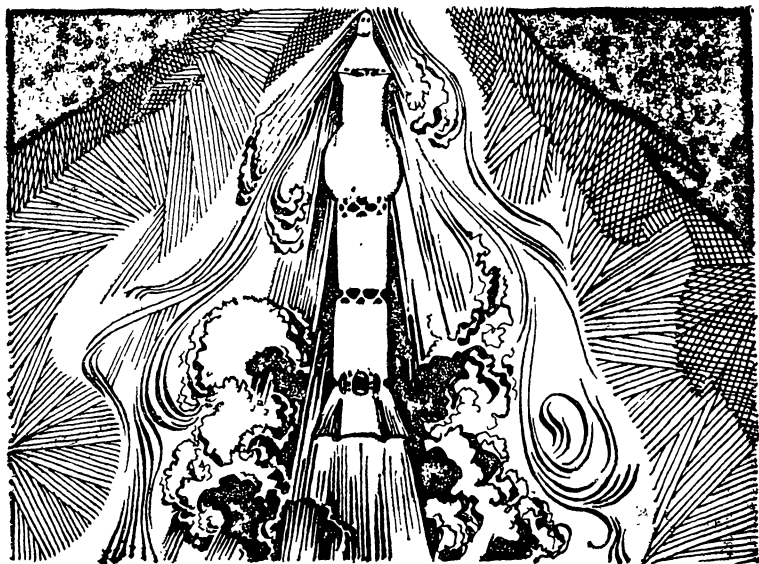
11. Мазуров Вл. Д. Об одном итерационном методе планирования, использующем распознавание образов для учета плохо формализуемых факторов.— Изв. АН СССР, сер. техн. киберн., 1973.— № 3, с. 205—207.

12. Кант И. Тракаты и письма.— М.: Наука, 1980.

13. Дородницын А. А. Информатика; предмет и задачи.— Вестник АН СССР, 1985.— № 2.

14. Паули В. Физические очерки.— М.: Наука, 1975.

15. Азанов В. Ф., Байдосов В. В., Хохлов И. А., Мазуров Вл. Д. Математико-медицинские исследования в ИММ УНЦ АН СССР.— В сб.: Достижения науки—производству.— УНЦ АН СССР, 1985.



А. Ф. Сидоров,  
доктор физико-математических наук

## АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Подавляющую часть физических процессов и явлений, которые происходят в сплошных средах (жидких, твердых, газообразных, типа плазмы и др.), можно описать с помощью систем дифференциальных уравнений или интегродифференциальных уравнений с частными производными. Такие уравнения — весьма сложный математический объект, особенно если они являются нелинейными, а именно учет нелинейных членов в уравнениях является зачастую решающим для описания очень многих важных эффектов механики сплошной среды. Надежное количественное описание таких эффектов является необходимым элементом при проектировании самых различных машин и устройств, начиная от таких крупномасштабных объектов, как самолет, подводная лодка, ракета, и кончая такими миниатюрными

приборами, как интегральная схема, гибкий световод и т. п. Особенно существенно значение количественных характеристик явлений при оптимальном проектировании конструкций, когда требуется добиться бóльшей экономичности, дальности полета, минимального веса или улучшить другие аналогичные параметры. Так, например, проектирование летательных аппаратов, полет которых может проходить со скоростью, большей скорости звука, требует умения решать задачу об обтекании тела газовым потоком в рамках нелинейных уравнений газовой динамики. Здесь в рамках линейных моделей не удастся правильно описать эффект возрастания сопротивления при приближении скорости полета к звуковой. Таких примеров можно было бы привести очень много.

Таким образом, потребности развивающейся новой техники поставили уже в 40-х годах нашего столетия задачу об эффективных способах нахождения решений систем нелинейных уравнений с частными производными с учетом реальных свойств веществ и геометрии проектируемых изделий. Известные ранее аналитические методы решения отдельных типов линейных уравнений (создание их связано с именами Фурье, Адамара, Римана, Лежандра и других известных математиков) и некоторых нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (Пуанкаре, Ляпунов и другие) не могли дать решения поставленных задач. Численные же методы, которые также успешно применялись для решения отдельных задач еще в прошлом веке (Гаусс, Леверрье и другие), не могли быть эффективно реализованы до появления хороших счетных машин. Конец 40-х годов и все последующие десятилетия проходили под знаменем бурного прогресса средств вычислительной техники. Первое время рост возможностей электронно-вычислительных машин, в первую очередь их быстродействия и памяти, выдвинул тезис о том, что с помощью достаточно мощных ЭВМ, с использованием сугубо численных методов (прежде всего разностных методов и методов прямого статистического моделирования) можно эффективно получить решение практически всех возникающих в приложениях задач без детального, аккуратного в математическом смысле исследования свойств применяемых математических моделей.

Для достаточно широкого круга задач такие результаты были действительно получены. Однако практика расчетов показала, что при решении сколько-нибудь сложных задач,

в случае каких-либо особенностей, например, зон пограничных слоев с большими градиентами параметров потока в задачах динамики вязкой среды, зон концентрации напряжений в прочностных задачах, зон кумуляции энергии в ряде задач физики взрыва, сложных локальных особенностей границ областей, «лобовой» способ решения дает малонадежные численные результаты, теряется точность вычислений. Кроме того, трехмерные расчеты, особенно в механике жидкости и газа при учете реальной геометрии аппаратов, с большим трудом осуществляются на современных ЭВМ, даже если в течениях не возникает каких-либо сильных особенностей. Если же соответствующие потоки газа или жидкости турбулизуются, то даже в рамках имеющихся математических моделей, в частности уравнений Навье—Стокса со специальной вязкостью, описывающих движения такого типа, расчет, например, трехмерного обтекания самолета турбулентным потоком газа с помощью имеющихся разностных методов, по оценкам известного американского ученого Чэпмена [1], требует ЭВМ с быстродействием  $\approx 10^{12}$ — $10^{13}$  флопс (1 флопс—1 арифметическая операция с плавающей запятой в секунду) и огромной оперативной памяти  $\approx 10^8$  слов. Достижение таких параметров ЭВМ в ближайшее время не прогнозируется, и решение такого типа задач остается в настоящее время открытой проблемой.

Целью этой статьи является изложение некоторой идеологии возможных путей развития эффективных подходов к решению сложных нелинейных задач математической физики и выработки стратегии получения решений, основанной как на сочетании чисто вычислительных методов, так и на применении некоторых аналитических конструкций и результатов исследования качественных и аналитических особенностей нелинейных задач механики сплошной среды. В связи с этим будет рассмотрен также вопрос о теоретической подготовке математика-вычислителя, которая необходима для успешной работы в области решения задач инженерно-физического плана и эффективного использования современных ЭВМ для математического моделирования и прогнозирования параметров проектируемых машин и аппаратов.

## О роли аналитических методов в прикладной математике

Что обычно понимают под аналитическими методами в теории уравнений с частными производными?

Как правило, под такими методами подразумевают прежде всего какие-либо способы представления решений некоторого класса дифференциальных задач с начальными условиями или краевыми условиями в виде математических объектов с простой структурой: в виде аналитической формулы, в виде некоторого интеграла от известной функции — квадратуры, достаточно быстро сходящегося или носящего асимптотический характер ряда с последовательно вычисляемыми коэффициентами. В первых двух случаях, пользуясь стандартными методами численного анализа, можно при любом фиксированном наборе входных параметров получить решение с заданной степенью точности за очень малое время ЭВМ, иногда это удается сделать и в третьем случае. Часто в первых двух случаях или в случае сходящегося ряда говорят о построенных **точных** решениях. В последнее время под термином «получено точное решение» понимают и ситуацию, когда задача сведена к интегрированию системы небольшого количества обыкновенных дифференциальных уравнений при условии отсутствия особенностей (конечный промежуток интегрирования, достаточно гладкие коэффициенты и т. п.). Такого типа задачи можно практически с произвольной точностью (снова при фиксированном наборе входных параметров) решить на ЭВМ с помощью стандартных численных методов за сравнительно короткое время.

Ценность классов точных, в указанном выше смысле, решений определяется многими факторами. Прежде всего важна физическая содержательность таких решений. Для целого ряда физических и механических явлений удастся получить аналитические решения и дать их подробный анализ (несколько таких ситуаций будет описано в разделе 2), хотя, конечно, их построение — редкая удача. Знание аналитического представления решения особенно ценно при большом количестве входных параметров: тогда обычно легко проанализировать свойства такого решения и использовать его с целью оптимизации каких-либо характеристик. Если решения содержат различные особенности, в частности физического плана (например, ударные волны, контактные разрывы, пограничные слои в механике газа и жидкости), их естественно использовать и в качестве тестов при

исследовании точности приближенных численных методов. Знание типовых аналитических представлений, передающих локальные особенности возникающих в физической задаче решений, очень существенно также для повышения эффективности и качества численных расчетов, когда эти особенности выделяются аналитически явно и рассчитываются лишь достаточно гладкие поля физических величин.

Кроме выше перечисленных, относительно простых математических объектов, описывающих различные типы точных решений, аналитические методы позволяют рассмотреть еще очень широкий круг вопросов. Здесь в числе первых следует отметить методы понижения размерности задачи и методы качественного и частично количественного изучения свойств решений дифференциальных уравнений. Под методами понижения размерности понимают методы, позволяющие получить описание данного класса явлений с помощью уравнений, которые содержат меньшее по сравнению с исходной задачей число независимых переменных. Даже если число уравнений при этом увеличивается, сокращение числа независимых переменных, хотя бы на одну, позволяет существенно более точно и экономично решать такие задачи на ЭВМ. Понятно, что большая часть возникающих в практике задач нестационарна и трехмерна. Решать же трехмерные задачи даже на самых современных ЭВМ чрезвычайно сложно и трудоемко, в этой ситуации часто говорят о «проклятии размерности». Поэтому ясно, что сведение трехмерной задачи хотя бы к двумерной представляет очень большую ценность.

Аналитические методы качественного изучения особенностей и гладкости решений также весьма важны для отбора и конструирования численных алгоритмов решения соответствующих задач, которые надежно описали бы возникающие нерегулярности решений. Априорное знание таких нерегулярностей особенно важно при построении адаптирующихся алгоритмов, о которых речь будет идти далее.

В областях той или иной гладкости решений многомерной задачи знание хороших аппроксимирующих агрегатов (базисов), построенных часто с помощью аналитических конструкций, передающих основные закономерности дифференциальной задачи, позволяет решить еще одну весьма важную задачу — об экономичном представлении информации, полученной в результате численного решения сложной многомерной задачи. Иногда линейные комбинации или рациональные дроби из «удачных» базисных функций позво-

ляют при ограниченном наборе коэффициентов разложения построить достаточно точную аппроксимацию параметров физических полей в трехмерных задачах.

Таким образом, вышесказанное позволяет утверждать, что и в настоящее время, несмотря на мощный и бурный рост возможностей вычислительной техники, знание, учет и развитие возможностей аналитических методов необходимы, в частности, при решении весьма сложных многомерных задач.

## Об основных аналитических методах механики сплошной среды

Будем разделять условно методы аналитического представления уравнений с частными производными на два типа. Методы первого типа позволяют строить классы «точных» решений в указанном выше смысле или понижать размерность задачи и применимы к относительно узким частным классам уравнений. Для достаточно общих ситуаций, когда уравнения имеют сложную структуру, содержат различного вида нелинейности и переменные коэффициенты, эти методы, как правило, не срабатывают.

Методы второго типа связаны прежде всего с представлениями решений различного рода рядами. Они позволяют рассмотреть весьма широкий круг задач, а в ряде случаев сконструировать и общее решение.

Основные уравнения механики сплошной среды нелинейны. Отметим прежде всего принципиальную разницу между методами решения линейных и нелинейных задач. Для однородных линейных уравнений работает принцип суперпозиции: произвольная линейная комбинация частных решений линейного уравнения снова является решением исходного уравнения. Применение этого принципа позволяет строить решения с функциональным произволом (если известны частные решения, зависящие от параметров) и тем самым решать широкий круг задач. Развитые для линейного случая методы интегрирования уравнений с постоянными коэффициентами, уравнений, коэффициенты которых не зависят от одного или нескольких независимых переменных, методы нахождения фундаментальных решений и еще целая серия [2] других методов, получили очень широкое распространение. Однако все они оказались фактически неприменимы к решению нелинейных задач. Отсут-



ствие принципа линейной суперпозиции и каких-либо других достаточно общих конструктивных принципов чрезвычайно усложняет аналитическое исследование нелинейных задач.

Не ставя перед собой задачу дать сколько-нибудь полное представление о разработанных на сегодняшний день методах исследования нелинейных задач, попытаемся все же кратко изложить основные, с нашей точки зрения, подходы, которые достаточно широко используются в настоящее время. Конечно, сколько-нибудь детальное изложение этой темы в рамках данной статьи невозможно, но некоторые идеи, используя минимальное число формул, мы попробуем очень кратко осветить и указать соответствующие источники, предполагая (как и до этого раздела), что о стандартных математических объектах (рядах, обыкновенных дифференциальных уравнениях и т. п.) у читателя имеется представление.

Начнем с методов I типа. Как уже говорилось, получение классов точных решений возможно лишь для конкретных систем уравнений и хронологически впервые, пожалуй, такие физически содержательные решения были получены для уравнений гидродинамики и газовой динамики Риманом [3]. Риман, в частности, рассматривал нестационарные движения несжимаемой жидкости, в которых компоненты вектора скорости линейны по пространственным координатам, и применял их к изучению движения жидкого эллипсоида.

В дальнейшем в большой серии работ были получены широкие обобщения решений такого типа как на случай движения сжимаемых сред [4, 6], когда построенные решения были использованы для изучения эволюции гравитирующих газовых эллипсоидов, так и на случай, когда свойство линейности также в сжимаемой среде имеется лишь по части пространственных переменных [6]. Здесь удалось осуществить процедуру сокращения размерности исходной задачи, а также получить серии точных решений, описывающие движения некоторых типов закрученных потоков газа.

Работа Римана [3] инициировала также очень большую серию работ по так называемым бегущим волнам в механике сплошной среды, в первую очередь в газовой динамике [7]. В основе метода конструирования различных бегущих волн лежит предположение о функциональной зависимости между некоторыми искомыми функциями, описывающими поля физических величин. Это предположение

приводит к переопределенной системе уравнений с частными производными, анализ совместности которых для конкретных систем уравнений механики позволил получить классы точных физически содержательных решений и в ряде случаев понизить размерность задачи.

Очень широкое распространение в механике и физике получили так называемые автомодельные решения, характеризующиеся существованием некоторых комбинаций независимых переменных (автомодельных переменных), которые соответствуют определенным свойствам «подобия» или инвариантности рассматриваемых классов физических решений. Методы анализа размерностей физических величин, определяющих задачу, позволили [8] осуществить понижение размерности для весьма широкого круга физических и механических задач. Особенно эффективным в конструктивном плане оказалось в ряде ситуаций сведение сложной исходной задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой в качестве независимой переменной выступает автомодельная переменная. Это позволило получать классы точных решений в замкнутой форме, например знаменитое решение газодинамической задачи о точечном взрыве [8], и осуществить качественный и детальный количественный анализ важных задач в неинтегрируемых случаях.

Наиболее развитый в настоящее время систематический подход к классификации и получению широких классов точных решений связан с применением групповых методов анализа дифференциальных уравнений [9]. Знание допустимых групп преобразований независимых переменных и искомым функций, оставляющих инвариантными интегральные многообразия исходной системы (переводящих интегральную поверхность в интегральную же поверхность), позволяет построить широкие классы точных инвариантных решений (частным случаем их являются автомодельные решения), построить некоторые классы частично инвариантных решений (такими являются, например, бегущие волны), дать классификацию различных типов решений.

Другим методом получения точных решений и сокращения размерности задач является метод дифференциальных связей [7]. Исходная система уравнений пополняется дополнительными дифференциальными или другими соотношениями-связями, накладывается априори требование, чтобы полученная переопределенная система обладала каким-либо заданным функциональным произволом, и осуществляется

анализ совместности полученной системы уравнений. Таким путем в работе [7] был построен ряд точных содержательных решений механики сплошной среды.

В общей ситуации реализация как группового подхода, так и метода дифференциальных связей требует весьма трудного и громоздкого анализа совместности переопределенных систем уравнений с частными производными. Несмотря на то что теоретически такая задача решена (существует, например, метод Картана [7], который позволяет получить полную информацию о совместности заданной системы уравнений), практический анализ совместности, связанный с операциями «перекрестного» дифференцирования, чрезвычайно громоздок и приводит к появлению тысяч слагаемых в правых частях уравнений уже после нескольких шагов. Надежда на эффективное применение этих методов связана с разрабатываемыми в настоящее время и уже частично созданными программами автоматического проведения достаточно универсальных аналитических преобразований на ЭВМ [7].

Наконец, чтобы закончить с методами первой части, упомянем интенсивно развиваемые сейчас методы построения точных решений солитонного типа для отдельных классов нелинейных уравнений и систем уравнений, встречающихся в механике и физике сплошной среды при описании распространения некоторых типов волн с учетом их дисперсии [10]. Речь прежде всего идет об известном уравнении Кортевега де Фриза (КДФ) для функции  $u(x, t)$  ( $x$  — пространственная переменная,  $t$  — время, нижние индексы обозначают дифференцирование по соответствующим переменным)

$$u_t + \sigma u u_x + u_{xxx} = 0, \quad \sigma = \text{const.} \quad (1)$$

С помощью нетривиальных замен неизвестной функции удастся либо ( $\sigma u = 12(\ln F)_{xx}$ ) привести (1) к виду, для которого удастся найти серии точных решений, описывающих нестационарное взаимодействие отдельных волн специального вида — солитонов, амплитуда которых быстро убывает на бесконечности, либо свести задачу о получении серий точных решений (1) к решению вспомогательной спектральной задачи (так называемой обратной задачи теории рассеивания) для некоторого уже линейного уравнения второго порядка с частными производными. Одним из самых замечательных факторов, полученных на этом пути, явилось обнаружение явления сохранения первоначальной формы и скорости уединенных волн-солитонов после их

нелинейного взаимодействия, когда до начала взаимодействия эти волны были разделены. Аналогичные методы были развиты и для некоторых других уравнений — уравнения Шредингера с кубической нелинейностью, уравнения  $\sin$ —Гордона  $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$  и некоторых других [11].

Переходя к методам второго типа, отметим прежде всего локальный способ представления решений уравнений и систем уравнений типа Коши—Ковалевской рядами Тейлора и знаменитую теорему С. Ковалевской. Речь идет об уравнениях вида (в случае одного уравнения)

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = F\left(t, x_1, \dots, x_n, u, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}, \dots\right) \quad (2)$$

с  $k \leq m$  и аналитической в некоторой области по всем своим переменным функции  $F$ . В случае аналитичности в окрестности некоторой точки  $x_1 = x_1^0, \dots, x_n = x_n^0$  соответствующих начальных данных для решения  $u$  и функции  $F$  решение можно представить локально сходящимся рядом Тейлора, коэффициенты которого находятся последовательным дифференцированием функций начальных данных и функции  $F$ . Однако конструктивное применение этой теоремы весьма ограничено обычно из-за относительно малых областей сходимости рядов Тейлора.

Наибольшее распространение при аналитических рассуждениях нелинейных задач получили, пожалуй, так называемые асимптотические методы и их модификации. Особенно развиты они в применении к системам обыкновенных уравнений [12]. Стал уже классическим метод малого параметра, развитый Ляпуновым и Пуанкаре. Широко применяются асимптотические методы усреднения и разделения движений на быстрые и медленные [12]. Ряд модификаций асимптотических методов развивается и применительно к решению нелинейных уравнений с частными производными. Характерной и наиболее часто используемой конструкцией для представления решений  $u(x, t)$  является регулярный ряд вида

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x, t) \varepsilon^k, \quad (3)$$

где  $\varepsilon$  — некоторый малый параметр, характеризующий обычно относительное отклонение какого-либо параметра возмущенного решения  $u(x, t)$  от некоторого невозмущенного (обычно известного) решения  $u_0(x, t)$ . Функции  $u_k(x, t)$  определяются тогда путем решений некоторых линейных

существенно более простых по сравнению с исходным уравнений. Ряд (3) может либо сходиться, либо иметь асимптотический характер. Часто вместо (3) приходится применять ряды более общего вида, содержащие или рациональные степени  $\varepsilon$ , или члены с логарифмическими особенностями типа  $\varepsilon^m \ln^n \varepsilon$  и т. п. [13]. Очень часто ряды типа (3) оказываются применимыми лишь для части области, в которой строится решение. Приходится в различных частях области (особенно в тех местах, где содержится какая-либо особенность решения) применять свои разложения вида (3) и затем каким-то образом «склеивать» их. С этой целью разработана мощная техника сращивания асимптотических разложений [13], которая с помощью преобразования масштабов позволяет «посмотреть в микроскоп» на зону особенностей, получить там свое разложение и затем по стандартной рецептуре срастить его с другими, в частности, регулярными разложениями. Иногда с этой же целью применяют метод деформированных координат [13]. Несмотря на почти полное отсутствие аккуратных математических обоснований таких процедур, эти методы позволили решить очень широкий круг нелинейных задач механики, в первую очередь гидродинамики, и интенсивно развиваются в настоящее время.

Вообще представления решений нелинейных задач различного типа рядами встречаются в огромном количестве прикладных работ. Часто конкретный вид и особенности решаемого уравнения позволяют построить ряды, сходящиеся в достаточно широкой области. Однако общие рецепты построения достаточно «хороших» рядов сразу для широкого класса уравнений и краевых задач практически отсутствуют.

Каким требованиям должны удовлетворять «хорошие» ряды? Пусть ряд для функции  $u(x, t)$  (для простоты рассмотрим случай двух переменных) имеет один из двух видов:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) P_k(x), \quad (4)$$

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(t) Q_k(x, t). \quad (5)$$

Функции  $P_k(x)$  и  $Q_k(x, t)$  будем считать базисными (они заданы), а с помощью коэффициентов  $a_k(t)$  ( $b_k(t)$ ) можно удовлетворить уравнению (например, вида (2)) и дополнительным начальным или краевым условиям. Вид ряда (4)

является стандартным при применении метода разделения переменных для линейных уравнений. Однако для нелинейных задач процедура получения коэффициентов  $a_k(t)$  существенно усложняется. Как правило, системы обыкновенных дифференциальных уравнений для  $a_k(t)$  оказываются зацепленными и нелинейными (например, когда  $P_k(x) = \sin kx$  ( $\cos kx$ ) и (4) является рядом Фурье), рекуррентное точное определение  $a_k(t)$  становится невозможным и необходимо соответствующие системы обыкновенных уравнений каким-то образом обрезать. Нахождение коэффициентов  $a_k(t)$  даже после обрезания нелинейной системы является достаточно трудоемкой операцией, особенно если требуется определить много коэффициентов.

Для «хороших» же рядов желательно иметь: 1) относительно простой рекуррентный и конструктивный способ построения коэффициентов, 2) быструю сходимость, такую, чтобы уже несколько членов ряда в основном передавали особенности поведения решений, 3) конструктивный способ приближенного удовлетворения начальных и краевых условий.

Желательно, чтобы основные характеристики явления правильно передавались первыми членами рядов — системы невысокого порядка для первых коэффициентов  $a_k(t)$  могли бы быть и нелинейными, а последующие коэффициенты хорошо было бы определять из линейных систем обыкновенных уравнений.

Конечно, универсальные ряды, отвечающие этим условиям, для широкого класса уравнений построить весьма трудно. Пока такие ряды удалось построить для некоторых конкретных уравнений и систем уравнений. Упомянем здесь в этой связи конструкции рядов, получившие распространение в последнее время.

Для квазилинейных гиперболических систем уравнений, в первую очередь для уравнений газовой динамики, был развит так называемый метод характеристических рядов [2, 14], использующий представления вида

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x, t) S_k(\varphi), \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad (6)$$

где функция  $\varphi$  определяет некоторую заданную характеристическую поверхность

$$\varphi(x, t) = 0 \quad (7)$$

исходной системы дифференциальных уравнений;  $S_k(\varphi)$  — какая-либо система базисных функций; коэффициенты  $g_k(x, t)$  определяются из некоторых дифференциальных уравнений, более простых по сравнению с исходными.

Такой вид рядов (6) в случае линейных гиперболических уравнений, когда в качестве  $S_0(\varphi)$  можно взять произвольную обобщенную функцию,  $d/d\varphi S_k(\varphi) = S_{k-1}(\varphi)$ , иногда называют лучевыми разложениями или разложениями на бегущие волны [2]. В этом случае коэффициенты  $g_k(x, t)$ , если поверхность (7) имеет первую кратность, можно найти из вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с независимой переменной  $t$ . Начальные данные для интегрирования этой системы определяются обычно дополнительными краевыми условиями, заданными на некоторой нехарактеристической поверхности. Для линейного случая такие ряды нашли широкую область приложений, при этом оказалось, что они, как правило, очень быстро сходятся.

В дальнейшем (обзор работ дан в [14]) этот метод был обобщен для некоторых систем базисных функций  $S_k$ , в частности при  $S_k(\varphi) = \varphi^k$  для случая квазилинейных гиперболических систем уравнений, и хорошо зарекомендовал себя при решении ряда сложных пространственных задач газовой динамики. Оказалось, что коэффициенты  $g_0$ ,  $g_1$  определяются геометрией поверхности (7) (в том числе и для многомерного случая), коэффициент  $g_2$  — из нелинейного уравнения первого порядка, а последующие коэффициенты — из линейных дифференциальных уравнений. Применение специальных независимых переменных позволило для большой серии пространственных задач газовой динамики проинтегрировать в квадратурах системы уравнений для  $g_k$  и получить их явные представления. Решение конкретных задач показало быструю сходимость рядов (6) и возможность их применения для описания зон течения газа с большими градиентами газодинамических величин, в частности, в зонах сильных волн разрежения, расчет которых с высокой точностью обычными численными методами весьма труден.

В последнее время этот метод был перенесен и на случай параболических уравнений с сильным вырождением, которые используются, например, для описания нелинейной фильтрации газа в пористом грунте.

Серии относительно универсальных наборов базисных функций  $p_k(x)$  и  $Q_k(x, t)$  в (4), (5) (и в случае некоторых

более общих конструкций рядов), которые позволяют представлять решения широкого круга нелинейных уравнений с двумя независимыми переменными, были предложены в работах [15, 16]. Особенно эффективным использование таких рядов может оказаться при решении краевых задач в неограниченных областях, когда обычные разностные методы сталкиваются с рядом трудностей.

В заключение этого раздела упомянем кратко о возможностях и некоторых тенденциях развития так называемых прямых методов математической физики, которые можно назвать также численно-аналитическими. Такими методами являются, например, широко известные методы Ритца и Бубнова—Галеркина (в этом случае часто говорят о вариационных и проекционных методах).

Стандартная схема метода Галеркина, например, для линейного эллиптического уравнения второго порядка ( $L$  — дифференциальный оператор второго порядка)

$$Lu = f(x, y) \quad (8)$$

с краевым условием на границе  $\gamma$  двумерной области  $D$

$$u|_{\gamma} = 0 \quad (9)$$

заключается в приближенном представлении решения (8) в виде конечной суммы

$$u_N = \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x, y), \quad (10)$$

где функции  $\varphi_k$  удовлетворяют условиям (9), а  $a_k$  — неизвестные постоянные, определяемые из системы линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^N a_k \iint_D \varphi_i L \varphi_k dx dy = \iint_D f \varphi_i dx dy, \quad i = 1, \dots, N. \quad (11)$$

Успех метода Галеркина и его вариантов связан с удачным выбором полной системы функций  $\varphi_k$  и применением достаточно точного (при больших  $N$ ) способа решения уравнений (11). Широкое применение метода Бубнова—Галеркина еще в начале нашего века без использования каких-либо счетных машин при небольших  $N \approx 2; 3$  для решения задач в относительно простых областях, в частности на основе уравнения Пуассона, было обусловлено как раз хорошим выбором базисных функций  $\varphi_i$  и явным аналитическим способом решения (11). Дальнейшее развитие этих



методов сдерживалось как трудностями построения полных систем базисных функций для сложных областей, так и большими трудностями решения систем (11) уже при  $N \geq 5$  из-за очень плохой обусловленности матриц этих систем, которые усугубляются при приближенном расчете интегралов в (11), являющихся элементами этих матриц. Если первую трудность можно снять, используя, например, аппарат  $R$ -функций [17], с помощью которого достаточно легко можно строить полные системы базисных функций (хотя и достаточно сложных) для многомерных областей с кусочно-гладкими аналитическими границами, то преодолеть вторую трудность значительно сложнее. Ряд рекомендаций по этому поводу дан в [18].

Широко известный метод конечных элементов (МКЭ) позволяет преодолеть вторую трудность за счет очень специфического способа выбора базисных функций  $\varphi_i$  — конечных элементов, отличных от нуля лишь в малых подобластях области  $D$ , но приводит к необходимости брать достаточно большое число таких элементов. Фактически МКЭ уже не имеет ярко выраженной в классических методах Рунге и Бунднова — Галеркина аналитической природы и в некотором смысле более близок к проекционно-разностным подходам.

В случае применения всех этих методов к решению нелинейных краевых задач для коэффициентов  $a_k$  (для нестационарных задач часто берут  $a_k = a_k(t)$ ) вместо (11) получаются нелинейные системы уравнений, которые обычно решают с помощью какой-либо итерационной процедуры (численного метода интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений в случае  $a_k = a_k(t)$ ).

Несмотря на отмеченные трудности, прямые методы решения задач математической физики большой размерности могут оказаться более эффективными по сравнению с конечно-разностными подходами. Особенно эффективны они при решении задач об определении собственных чисел дифференциальных операторов. Такие задачи распространены при исследовании устойчивости стационарных процессов механики жидкости и газа по отношению к различным возмущениям.

## О стратегии выбора приближенного метода решения «большой» задачи механики сплошной среды

Под «большой» задачей при этом понимают обычно либо двухмерную задачу в достаточно сложной области, часто с учетом нескольких физических процессов (теплопроводности, химических реакций и превращений, распространения какого-либо вида частиц и т. п.), либо аналогичную трехмерную задачу. В качестве математической модели таких явлений, как правило, используются сложные зацепленные системы уравнений с частными производными с необходимым набором начальных и краевых условий.

О роли ЭВМ и математического эксперимента в практике проектирования сложных машин и устройств с учетом многообразных физических процессов уже говорилось во введении, она хорошо известна и описана (см., например, [19]).

Надежный количественный успех при решении таких задач связан с удачным выбором приближенного метода решения (обычно численного), который должен достаточно точно передать особенности изучаемого явления. Для решения задач о выборе хотя бы частично оптимального в данных условиях метода необходим прежде всего предварительный аналитический анализ.

Перечислим основные цели, которые желательно было бы достигнуть в результате этого анализа. Результаты, полученные по каждому из перечисленных ниже пунктов, будут существенно влиять на выбор приближенного метода решения.

1. Целесообразно установить тип системы уравнений в целом или хотя бы некоторых подсистем, входящих в систему. Очень важно проверить, будет ли тип постоянным во всей области определения решения или существуют подобласти, где он меняется.

2. Необходимо попытаться исследовать корректность поставленных начально-краевых или краевых задач в классическом смысле, т. е. установить, существует ли решение, единственно ли оно, устойчиво ли по входным параметрам. Если ответ на хотя бы один из поставленных трех вопросов отрицательный, необходимо либо корректировать исходную модель, либо привлекать какие-либо методы регуляризации для решения некорректно поставленных задач [20].

3. Существенно априорное выяснение вопроса о степени гладкости решения, локализации зон его особенностей. Если решение или его производные имеют разрывы — так называемые обобщенные решения, — важно получить хотя бы частичное аналитическое описание соотношений, которые должны выполняться на линиях разрыва решений.

4. Если область, в которой решается задача, неограниченна, то перед применением численных методов, как правило, необходимо либо отобразить ее с помощью подходящего отображения на какую-нибудь относительно простую конечную область, либо попытаться определить асимптотическое поведение решения на бесконечности, с тем чтобы, пользуясь численными методами, правильно поставить граничные условия в «обрезанной» относительно небольшой области, где решение будет искажаться, например, сеточными методами. Правильная и достаточно точная постановка краевых условий в такой «обрезанной области» может сильно увеличить экономичность и эффективность численных методов.

5. С целью возможного применения методов теории возмущений (асимптотических методов) важно выделить малые или большие параметры, входящие в систему уравнений и характеризующие основные особенности изучаемых физических процессов. Знание таких параметров может позволить упростить исходную систему уравнений в некоторых областях определения решения и тем самым применить более экономичные численные подходы. Так обстоит дело, например, в задачах стационарного обтекания тел вязким газом на основе уравнений Навье — Стокса, когда вязкость зачастую можно учитывать лишь в области пограничного слоя вблизи тела, а в основной области течения можно пользоваться более простыми уравнениями Эйлера.

6. Также с целью возможного упрощения математической модели явления следует по возможности осуществить с помощью вышеупомянутых методов анализ системы уравнений на предмет сокращения числа независимых переменных, выбора рациональной системы координат, возможности аналитических представлений решений (рядами) в отдельных подобластях и т. п.

7. Наконец, с помощью аналитических методов целесообразно получить набор аналитических тестов (задачу при этом можно упрощать или подбирать специальные правые части уравнений). Желательно, чтобы эти тестовые реше-

ния содержали основные особенности, присущие рассматриваемому классу задач. Проверка численных методов на этих тестовых точных решениях может помочь оценке точности и отбраковке примененных методов.

Ответы, хотя бы частичные, на перечисленные семь вопросов, как уже отмечалось, будут существенно влиять на выбор оптимальной стратегии приближенного решения «большой» задачи. В этой связи отметим несколько современных тенденций развития численных методов решения нелинейных «больших» задач механики сплошной среды.

Основные численные методы математического моделирования сложных процессов, происходящих в сплошной среде, описаны в большом числе монографий (см., например, [21—29]) и огромном числе статей. Они претерпевают непрерывную эволюцию и переоценку вместе с ростом сложности задач и увеличением возможностей мощных ЭВМ: быстродействия, оперативной памяти, многопроцессорности. Ряд широко применяемых вычислительных методов тесно связан и широко использует результаты аналитического исследования задач.

Так, один из наиболее эффективных подходов к конструированию численных алгоритмов использует идеи адаптации применяемых методов к особенностям решаемых задач. Этот подход часто связан с явным выделением различного вида особенностей, иногда явным выделением основных типов разрывов решений, отдельных областей, характеризующих теми или иными свойствами решений. Например, для уравнений газовой динамики, которые описывают процессы распространения различного рода разрывов (ударных волн, контактных разрывов, волн разрежения), такие адаптационные методы описаны в работе [26]. Ясно, что аналитическое знание основных качественных и некоторых количественных закономерностей может существенно повлиять на точность применяемых методов. Иногда адаптацию под особенности решения осуществляют без явного выделения разрывов и зон особого поведения, используя так называемые адаптирующиеся сетки [30]. При этом исходная система стационарных или эволюционных уравнений пополняется дополнительными уравнениями, описывающими поведение сетки, на которой должны достаточно точно аппроксимироваться решения исходной дифференциальной задачи. Задача о выборе таких уравнений для сетки, о выборе экономичных и устойчивых алгоритмов совместного расчета решений и сетки является непростой

и также требует предварительного аналитического анализа.

В настоящее время широкое распространение при решении сложных многомерных задач получил метод расщепления [21] и различные его модификации. Наиболее часто применяется расщепление по пространственным координатам и физическим процессам, которое позволяет сводить решение сложной зацепленной системы уравнений со многими пространственными переменными к цепочке простых одномерных подзадач. Каждая из них связана обычно с каким-либо одним физическим процессом. Тем самым решение сложной задачи сводится к решению серии простых задач, что весьма удобно при программной реализации. В последнее время стало применяться расщепление по типам уравнений. Выделение в качестве вспомогательных задач решения групп уравнений, обладающих сходными по типу свойствами, позволяет применять эффективные вычислительные процедуры, настраиваемые на заданный тип уравнений. Здесь, таким образом, также, по существу, должны использоваться результаты предварительной аналитической работы.

Априорное знание степени гладкости решения может быть конструктивно использовано при построении так называемых алгоритмов «без насыщения» [31], которые позволяют автоматически существенно повысить точность расчета решений с большой гладкостью, например, при сгущении сеток в отличие от обычных методов, когда точность повышается незначительно.

В уже упомянутых численно-аналитических методах (Ритца, Бубнова — Галеркина и др.), а также в интенсивно развиваемых сейчас методах граничных элементов (граничных интегральных уравнений) использование аналитических конструкций, в частности, интегральных представлений решения или способов сведения дифференциальной задачи к решению системы интегральных уравнений, может дать чрезвычайно экономичные приближенные численные алгоритмы. Иногда они позволяют при решении, например, сложных пространственных задач теории упругости получить выигрыш во времени ЭВМ в десятки и более раз по сравнению с традиционными способами решения. При этом использование ЭВМ для проведения больших сопутствующих аналитических выкладок также может существенно облегчить программирование таких методов. Это направление применения ЭВМ в настоящее время бурно разви-

вается, и возможности современных достаточно мощных ЭВМ позволяют успешно осуществить большие и громоздкие аналитические преобразования.

Наконец, эффективная реализация вычислительных процессов на многопроцессорных современных ЭВМ требует большой предварительной работы по распараллеливанию численных алгоритмов, их рациональной организации и синхронизации. Ясно, что оптимальное функционирование таких вычислительных процедур требует большой и сложной аналитической проработки.

При изучении сложных нелинейных процессов, поддающихся исследованию аналитическими методами с большим трудом, ЭВМ позволяют провести большие численные эксперименты с целью проверки или выдвижения гипотез о качественной или количественной стороне нелинейного явления. Обнаруженная эвристическим путем на ЭВМ закономерность может служить источником новых аналитических разработок и исследований. Такое применение ЭВМ привлекало внимание многих ученых уже с самого начала появления ЭВМ. Так, одна из первых ЭВМ была использована Ферми и Уламом [32] с целью исследования распределения энергии по частотам в нелинейных волновых процессах. Ими было обнаружено аномальное, сохраняющееся длительное время, распределение энергии по первым основным частотам. Полное аналитическое исследование этого факта отсутствует и в настоящее время. С помощью ЭВМ был обнаружен и целый ряд других очень интересных и необычных эффектов в нелинейных процессах. Упомянем в этой связи образование «странных аттракторов» — сложных предельных многообразий нелинейных динамических систем, к которым приближаются со временем траектории динамической системы [33], открытие так называемого  $T$ -слоя в плазме, неожиданно образующегося при разлете плазменного шнура. Такой  $T$ -слой характеризуется аномально высокой температурой [34]. С помощью ЭВМ в последнее десятилетие было сделано удивительное открытие о количественной универсальности поведения широкого класса нелинейных систем уравнений, зависящих от параметра, в процессе ветвления решений при изменении параметра, когда число решений может неограниченно расти с удвоением периода. Оказалось, что две постоянные  $\sigma = 4,6692\dots$  и  $\lambda = 2,5029\dots$  характеризуют переход к хаотическому поведению решений очень широкого класса нелинейных систем

уравнений [35]. Аккуратное аналитическое обоснование этого факта еще ждет своих исследователей.

Таким образом, развитие аналитических и численных методов часто идет параллельно, оба подхода взаимно обогащают и оплодотворяют друг друга, позволяя тем самым получать более глубокие результаты.

## О профессиональной подготовке математика-вычислителя

Математиков-вычислителей, занимающихся решением прикладных задач, условно можно разделить на три группы. Первая группа — математики-прикладники инженерно-физического плана, вторая — математико-экономического плана и, наконец, третья группа — системные программисты. Речь здесь идет главным образом о математиках с университетским образованием, которые работают в вычислительных центрах научно-исследовательских институтов, заводов и различных организаций.

Первая группа вычислителей занимается разработкой методов и решением на ЭВМ задач, возникающих при проектировании различных конструкций, машин и механизмов, при управлении технологическими процессами, исследовании новых физических явлений и процессов в самых разнообразных средах. Кроме систематического применения математических моделей изучаемых явлений, разработки алгоритмов решения соответствующих математических задач, они, как правило, тесно связаны и с отработкой программных реализаций таких алгоритмов, анализом полученных численных результатов с целью определения эффективности использованной математической модели или ее видоизменения.

Вычислители второй группы, как правило, работают в организациях экономического плана, связаны с разработкой и функционированием на ЭВМ разнообразных автоматизированных систем управления (АСУ), разработкой методов решения задач планирования, прогнозирования, оптимального размещения, обработки и рационального хранения больших потоков информации, решением других задач подобного типа.

Наконец, системные программисты, работая в вычислительных центрах, занимаются поддержкой и развитием

операционных систем, разработкой структуры и программной реализацией баз данных, системных частей пакетов прикладных программ, больших комплексов программ, диалогового, графического и другого сервисного математического обеспечения и т. п.

Курсы лекций, из которых в вузах складывается профессиональная подготовка всех этих групп вычислителей, можно приблизительно разделить на 4 цикла.

1. Традиционные общематематические дисциплины.

2. Принципы построения ЭВМ, языки программирования, организация баз данных и больших программ.

3. Математические модели и вычислительные методы общего плана.

4. Специальные курсы, связанные со специализацией и направленные на углубленное изучение дисциплин, знание которых необходимо для успешной профессиональной деятельности.

Курсы лекций первых трех циклов могут быть в значительной мере общими для всех трех групп вычислителей. Знание их необходимо для широкой профессиональной ориентации. Кстати, именно этими тремя циклами лекций, вероятно, можно и ограничиться на первом, сравнительно коротком, этапе обучения. В случае перехода в будущем на двухступенный способ университетского образования — укороченный — 3—4 года для основной массы студентов и продленный — до 5—6 лет для наиболее подготовленных, проявивших хорошие способности студентов.

Перечислим более подробно основные курсы лекций, которые, по нашему мнению, должны войти в третий цикл, и курсы четвертого цикла, необходимые для подготовки математика-вычислителя инженерно-физического плана. Итак, в третий цикл должны входить такие основные курсы:

3.1. Методы приближенных вычислений (стандартные численные методы вычисления интегралов, решения систем нелинейных уравнений, приближения функций, решения обыкновенных дифференциальных уравнений, методы регуляризации при решении неустойчивых задач).

3.2. Численные методы линейной алгебры, в том числе для плохо обусловленных систем уравнений.

3.3. Численные методы оптимизации, в том числе элементы линейного и нелинейного программирования.

3.4. Методы статистического моделирования, в том числе основные конструкции и подходы метода Монте-Карло.



Изучение этих дисциплин полезно всем вычислителям, в том числе и системным программистам, так как оно должно способствовать выработке стремления к принятию оптимальных решений как при реализации конкретной прикладной разработки, так и при создании программ или системных частей программ.

Основные курсы лекций четвертого цикла инженерно-физического плана таковы:

4.1. Численные методы решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений и задач оптимального управления.

Здесь речь должна идти о методах решения начальных и краевых задач для систем с особенностями (наличие зон пограничных слоев, большого промежутка интегрирования) и специфических задач теории оптимального управления.

4.2. Разностные и прямые методы решения задач математической физики.

Предметом рассмотрения этого курса являются в основном методы решения линейных уравнений с частными производными численными и численно-аналитическими методами, общие вопросы аппроксимации с помощью конечных разностей, устойчивость разностных схем, эффективные методы решения многомерных сеточных уравнений.

4.3. Численные методы решения задач механики сплошной среды.

Системы уравнений, которые должны здесь рассматриваться, зачастую нелинейны (уравнения газовой динамики, гидродинамики, теории пластичности). Это требует применения специальных приемов для расчета различных обобщенных решений (решений с разрывами разного типа), применения специальных разностных схем. Для прочностных задач, опирающихся на уравнения теории упругости, в этом курсе должны быть рассмотрены широко используемые в настоящее время метод конечных элементов и метод граничных элементов. В принципе этот курс может быть разбит на две части: гидродинамическую и прочностную.

4.4. Методы оптимального проектирования и конструирования машин и механизмов.

В этом курсе должны получить развитие изученные в п. 3.3 численные методы оптимизации с целью их ориентации на оптимальное конструирование и функционирование технических объектов. Здесь, в частности, целесообразно изложить возможности методов распознавания образов

для задач прогнозирования свойств технологических процессов в условиях плохой математической их формализуемости, а иногда и в условиях отсутствия достаточно accurate математической модели.

4.5. Модели и постановки задач в механике сплошной среды. Аналитические методы исследования.

Этот курс, вероятно, должен быть годовым. В нем должны найти отражение вывод основных уравнений механики сплошной среды, физические допущения и возможные упрощения моделей, постановки начальных и краевых условий, корректность этих постановок. Здесь же целесообразно изложить некоторые основные аналитические подходы, используемые для анализа задач: основные идеи асимптотических методов, методов теории подобия и размерности, некоторых других аналитических конструкций, о которых шла речь в разделе 2.

В значительной мере соображения, высказанные в предыдущих разделах статьи, фактически являются обоснованием необходимости введения этого курса. Мой опыт работы свидетельствует, что отсутствие такого курса в настоящее время и незнание выпускниками, в частности, Уральского государственного университета основных математических моделей механики сплошной среды и других физических дисциплин приводят к тому, что значительная часть математиков-вычислителей, работающих в конструкторских бюро заводов, НИИ, ВЦ различных организаций, используется в качестве программистов-кодировщиков. Они программируют алгоритмы (иногда несовершенные или неэкономичные), предложенные им инженерами или другими специалистами конкретных технических наук и не используют свой, обычно высокий, интеллектуально-логический общий потенциал, который дает университет. Введение такого курса может помочь преодолеть эти тенденции и повысить эффективность работы математика-вычислителя в прикладных областях.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Чэ п м е н Д. Р. Вычислительная аэродинамика и перспективы ее развития. Драйденовская лекция (обзор).— Ракетная техника и космонавтика.— 1980, т. 18, № 2, с. 3—32.
2. Ку р а н т Р. Уравнения с частными производными.— М.: Мир, 1964.— 830 с.
3. Р и м а н Б. Сочинения.— М.— Л.: Гостехиздат, 1948.— 543 с.

4. Овсянников Л. В. Новое решение уравнений гидродинамики.— Докл. АН СССР, 1956. Т. III.— № 1,— С. 47—49.
5. Богоявленский О. И., Новиков С. П. Однородные модели в общей теории относительности и газовой динамике.— Усп. мат. наук. 1976. Т. 31, вып. 5 (191),— С. 33—48.
6. Сидоров А. Ф. О двух классах решений уравнений газовой динамики.— Журнал ПМТФ, 1980.— № 5.— С. 16—24.
7. Сидоров А. Ф., Шапеев В. П., Яненко Н. Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике.— Новосибирск: Наука, 1984.— 270 с.
8. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике.— М.: ГИТТЛ, 1957.— 375 с.
9. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.
10. Захаров В. Е., Манакон С. В. и др. Теория солитонов. Метод обратной задачи. Под ред. С. П. Новикова.— М.: Наука, 1980.— 320 с.
11. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны.— М.: Мир, 1977.— 622 с.
12. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики.— М.: Наука, 1981.— 400 с.
13. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости.— М.: Мир, 1967.— 310 с.
14. Васин В. В., Сидоров А. Ф. О некоторых методах приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений.— Изв. вузов. Математика, 1983.— № 7.— С. 13—28.
15. Титов С. С. Разложение решений нелинейных уравнений в двойные ряды.— Дифференциальные уравнения. Минск, 1978.— Т. XIV.— № 10.— С. 1844—1850.
16. Коковихина О. В., Сидоров А. Ф. Специальные конструкции рядов для решения нелинейных уравнений с частными производными.— В кн.: Числен. методы механ. сплошной среды.— Новосибирск: 1984. Т. 15.— № 3.— С. 72—84.
17. Рвачев В. Л. Теория  $R$ -функций и некоторые ее приложения.— Киев: Наукова думка, 1982, 551 с.
18. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов.— М.: Наука, 1966.— 432 с.
19. Самарский А. А. Современная прикладная математика и вычислительный эксперимент.— Коммунист, 1983.— № 18.— С. 31—42.
20. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1974.
21. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики.— Новосибирск: Наука, 1967.— 195 с.
22. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные схемы газовой динамики.— М.: Наука, 1975.— 350 с.
23. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений.— М.: Наука, 1978.— 590 с.
24. Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред.— М.: Наука, 1984.— 520 с.
25. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике.— М.: Наука, 1978.
26. Годунов С. К., Забродин А. В. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики.— М.: Наука, 1976.

27. Ковеня В. М., Яненко Н. Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики.— Новосибирск: Наука, 1981.— 303 с.

28. Одэн Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред.— М.: Мир, 1976.— 464 с.

29. Бреббиа К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике.— М.: Мир, 1982.— 245 с.

30. Кутлер П. Перспективы развития теоретической и прикладной вычислительной аэродинамики.— Аэрокосмическая техника, 1985. Т. 3.— № 8.— С. 11—29.

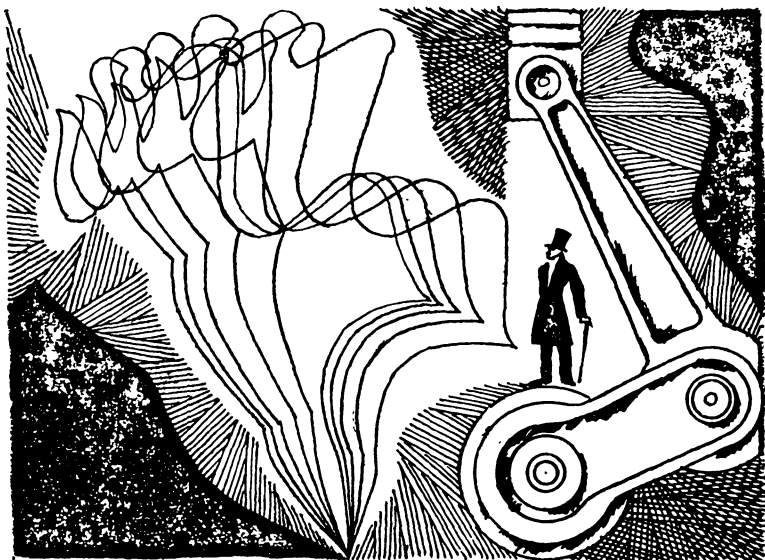
31. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики / Под ред. К. И. Бабенко.— М.: Наука, 1979.

32. Улам С. Нерешенные математические задачи.— М.: Наука, 1964.— 168 с.

33. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения.— М.: Мир, 1980.— 368 с.

34. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Заклязьминский Л. А., Волосевич П. П., Дегтярев Л. М., Курдюмов С. П., Попов Ю. П., Соколов В. С., Фаворский А. П. Нелинейный эффект образования высокотемпературного слоя газа в нестационарных процессах магнитной гидродинамики.— Докл. АН СССР, 1967. Т. 173.— № 4, с. 808—811.

35. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем.— Успехи физ. наук. 1983.— Т. 141.— вып. 2, с. 343—374.



Ю. Н. Субботин,

доктор физико-математических наук

## ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ И МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В математике и ее приложениях часто приходится вычислять значения различных функций. Однако для сложных функций эта задача может оказаться очень трудоемкой, а непосредственное определение некоторых, в том числе и элементарных, функций не дает прямого способа вычисления их значений. К последним относятся такие хорошо известные функции, как  $\cos x$ ,  $\sin x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\ln x$ ,  $a^x$ ,  $\int_0^x e^{-t^2} dt$  и многие другие.

Поэтому одной из основных задач теории приближения функций является задача замены сложной трудно вычисляемой функции «близкой» к ней более простой функцией, вычисление значений которой легко реализуется, например, на ЭВМ или мини-ЭВМ. Так, многие из перечисленных

выше функций часто используются в расчетах, и программы для вычисления их значений впаиваются в память ЭВМ в качестве стандартных программ. Поэтому достаточно задать функцию и те значения аргумента, в которых требуется вычислить значения функции, и ЭВМ выдаст результат. Как удастся ЭВМ, конечно, с помощью специалиста-математика, вычислять, например, значения функции  $\cos x$  при произвольном значении аргумента?

**I. Исторический ракурс.** Отметим, что в связи с развитием ЭВМ и математических средств алгоритмы вычисления элементарных функций изменялись.

Так, еще в XVIII в. для вычисления значений функции  $\cos x$  (и других элементарных функций) разлагали ее в ряд Тейлора и в качестве «близкой» функции брали частичную сумму этого ряда, т. е. алгебраический многочлен  $P_n(x)$  степени  $n$ :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k, \quad (1)$$

где  $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$  — коэффициенты разложения функции  $f(x)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $x_0$ . Степень  $n$  выбиралась в зависимости от требуемой точности. Чаще всего использовались разложения в окрестности точки  $x_0 = 0$ , известные еще Маклорену и Эйлеру. Например, при  $n = 2m$  или  $n = 2m + 1$  функция  $\cos x$  заменялась многочленом  $\sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ , где  $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$ ,  $0! = 1$ . Таким путем составлялись таблицы значений многих элементарных функций.

Также в XVIII в. для тех же целей можно было использовать интерполяционные многочлены Лагранжа. Отметим, что, используя формулы дополнения и приведения, достаточно уметь вычислять значения функции  $\cos x$  лишь при  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ . Пусть нам известны значения функции  $\cos x$  в точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ( $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq \frac{\pi}{2}$ ), тогда коэффициенты  $b_k$  многочлена  $Q_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$  степени  $n$  можно определить из условий

$$\sum_{k=0}^n b_k x_i^k = \cos x_i \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (2)$$

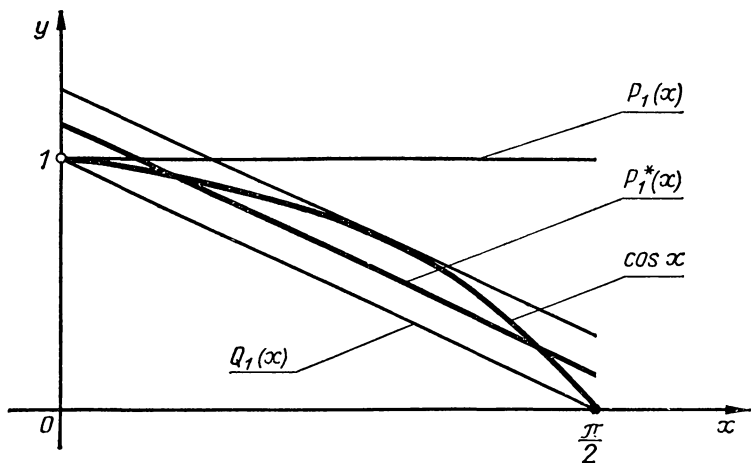


Рис. 10

Определив из этой системы коэффициенты  $b_k$ , мы в качестве приближенных значений функции  $\cos x$  берем значения многочлена  $Q_n(x)$ , который уже легко вычисляется.

Итак, в XVIII в. для приближенного вычисления функции  $\cos x$  имелись две возможности. Чему отдать предпочтение? Какой из этих многочленов ближе к функции  $\cos x$ ?

**II. Расстояние между функциями.** В отдельной точке на поставленный выше вопрос, пожалуй, можно ответить. Ближе тот, для которого модуль разности между значениями функции и полинома в этой точке меньше. Если для одного из многочленов это условие выполнено в каждой точке, то, естественно, этот полином считать более близким. Однако, как правило, это не так. Поэтому «близость» или расстояние определяется по совокупности точек (рис. 10).

Пример. Пусть  $n=1$  и в (1)  $x_0=0$ , а при определении  $Q_1(x)$  пусть  $x_0=0$ ,  $x_1=\frac{\pi}{2}$ . Тогда  $P_1(x)=1$ ,  $Q_1(x)=1-\frac{2}{\pi}x$  и (см. рис. 10) вблизи точки  $x=0$  полином  $P_1(x)$  ближе, чем  $Q_1(x)$  к  $\cos x$ , а вблизи точки  $x=1$  наоборот.

В теории и практике используется достаточно широкий спектр расстояний между функциями. Мы ограничимся лишь парой из них. На множестве функций, непрерывных на отрезке  $[a, b]$ , используется равномерное расстояние

$$\rho(f, g) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|. \quad (3)$$

Часто используется также среднеквадратическое расстояние между двумя функциями

$$\rho_1(f, g) = \left( \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4)$$

Аналогичные расстояния можно ввести и для функций, заданных лишь в конечном числе точек (на сетке):  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ . Мы будем использовать те же обозначения

$$\rho(f, g) = \max_{0 \leq i \leq m} |f(x_i) - g(x_i)|,$$

$$\rho_1(f, g) = \left( \sum_{i=0}^m [f(x_i) - g(x_i)]^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Малость расстояния  $\rho(f, g)$  между функциями  $f(x)$  и  $g(x)$  гарантирует, что их значения мало отличаются друг от друга в каждой точке отрезка  $[a, b]$ . Расстояние  $\rho_1(f, g)$  носит вероятностный характер. Малость этого расстояния гарантирует, вообще говоря, что значения функций  $f(x)$  и  $g(x)$  мало отличаются друг от друга лишь в «большинстве» точек, на «малом» множестве точек их значения могут сильно отличаться друг от друга. Например, пусть  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,

$$g(x) \equiv 0, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \varepsilon^2, \\ 0, & \varepsilon^2 < x \leq 1. \end{cases}$$

Тогда  $\rho_1(f, g) = \varepsilon$ , и при малых  $\varepsilon$  расстояние мало, хотя в точках  $x$  из отрезка  $[0, \varepsilon^2]$  значения функций  $f(x)$  и  $g(x)$  отличаются на единицу,  $|f(x) - g(x)| = 1$ .

После введения понятия «расстояние между функциями» вполне можно ответить на вопрос, формулировавшийся в конце пункта 1. Так, при выборе расстояния  $\rho$  тот из многочленов «ближе» к функции  $\cos x$ , равномерное расстояние до которого от этой функции меньше. Например при  $n = 1$  из рис. 1 видно, что  $\rho(\cos, Q_1) < \rho(\cos, P_1)$  т. е. многочлен  $Q_1(x)$  лучше приближает функцию  $\cos x$  на отрезке  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , чем  $P_1(x)$ .

Как уже отмечалось, в XVIII в. математики могли построить интерполяционный многочлен Лагранжа, а для достаточного числа раз дифференцируемых функций могли вычислить частичную сумму ряда Тейлора и для всех из некоторого отрезка могли оценить погрешность при



ближения разлагаемой функции частичной суммой Тейлора. В частности, так составлялись таблицы различных элементарных функций, при этом была гарантирована требуемая точность для всех табличных значений аргумента. Эта же точность с использованием линейной интерполяции гарантировалась и для промежуточных значений аргумента, т. е. фактически математики были близки к определению равномерного расстояния.

На основании этого, учитывая, что математика часто развивается, следуя своим внутренним законам, можно сделать вывод о возможности в XVIII в. постановки вопроса о построении многочлена степени  $n$ , равномерное расстояние которого до функции  $\cos x$  (а затем и любой непрерывной функции) было наименьшим. Однако потребовалось около столетия и конкретная прикладная задача, чтобы появилась теория наилучшего равномерного приближения многочленами.

**III. Об одной прикладной задаче.** XVIII—XIX вв. были веками паровых машин. Создатель паровых машин Уатт среди всех своих изобретений, по собственному признанию, больше всего ценил параллелограмм Уатта 1784 г. — шарнирный механизм, служивший для передачи поступательного движения поршня во вращательное движение кривошипа или, более узко, служивший для поддержания движения штока поршня, близкого к прямолинейному.

Создателем теории наилучшего равномерного приближения функций является великий русский математик П. Л. Чебышев. Он с детства интересовался шарнирными механизмами. По воспоминаниям коллег, этот интерес сохранился у него и во время обучения в Московском университете. В отчете о своей первой зарубежной командировке (1852 г.) П. Л. Чебышев отмечал, что ему было интересно сравнить результаты своих расчетов с реальным состоянием дела. В частности, он посетил музей паровых машин и обратил внимание на значительный износ сальников при работе поршня за счет неправильностей его хода, связанного с отклонением штока поршня от прямолинейного движения.

Вскоре (1853 г.) появилась статья П. Л. Чебышева «Теория механизмов, известных под названием параллелограмма» [1], в которой и были заложены основы теории наилучших равномерных приближений. В последующем он неоднократно обращался как к теории наилучших приближений, так и к теории шарнирных механизмов. П. Л. Че-

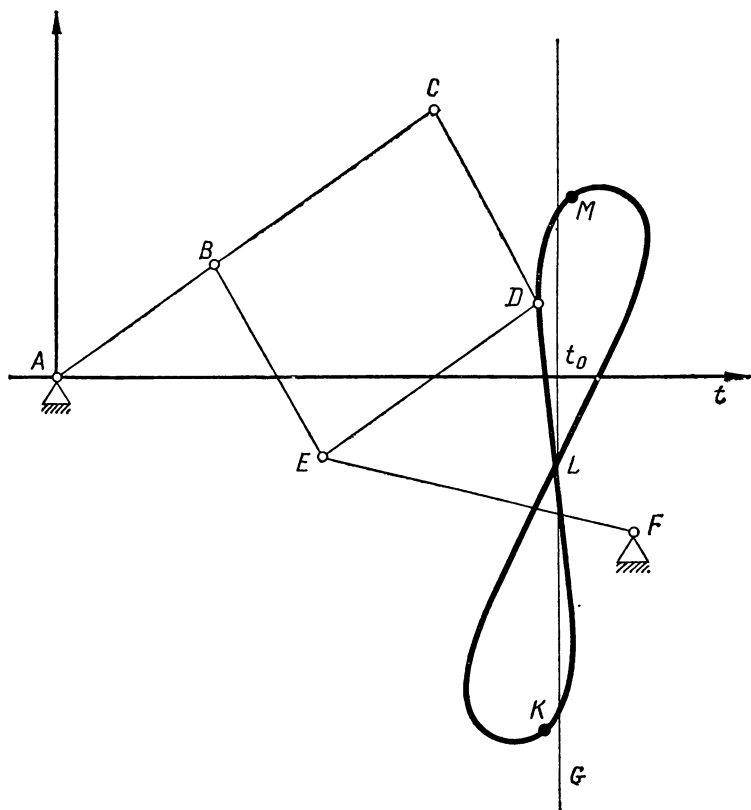


Рис. 11

бышев, в частности, разработал ряд оригинальных шарнирных механизмов с высокой точностью хода по заданной траектории. Оценив погрешность хода одного из таких механизмов, П. Л. Чебышев отмечает, что если использовать его метод поправок, то «точность хода механизма может быть доведена до предела, недостижимого для технических средств изготовления механизмов» [2]. Отметим, что речь идет о технике середины прошлого века.

В чем же состоял метод Чебышева? На рис. 11 схематически изображен механизм, называемый параллелограммом Уатта. Точки  $A$  и  $F$  закреплены,  $AC$  — жесткое звено, в точках  $A, B, C, D, E, F$  соответствующие звенья могут свободно вращаться, т. е. соединены шарнирно. При движении механизма точка  $D$  описывает «восьмерку».

Не вдаваясь в детали, отметим, что к точке  $D$  крепится шток поршня паровой машины. Часть размеров механизма обусловлена условиями эксплуатации (размеры машинного отделения). В итоге остается четыре свободных параметра, включая положение прямой  $GH$ , а также параметр, характеризующий положение точки  $D$  на кривой  $KLM$  (часть «восьмерки»). Обозначим их соответственно через  $a, b, c, d, x$ . Пусть  $x$ —параметр, характеризующий положение точки  $D$  на кривой  $KLM$ . У Чебышева  $x$ —угол наклона коромысла (балансира)  $AC$  от горизонтального положения. При этом  $x$  изменяется на некотором отрезке  $[-h, h]$ . Такой выбор параметра  $x$  осуществлен из тех соображений, чтобы пределы его изменения были как можно меньше, т. е.  $x$  мало.

Задача состоит в таком выборе свободных параметров механизма и положения прямой  $GH$ , в направлении которой движется поршень, чтобы кривая  $KLM$  как можно ближе была к прямой  $GH$ . Первоначально выбор параметров осуществлялся чисто эмпирически. Первую попытку создать теорию предпринял Прони, но его теория в основном объясняла лишь то, что было к тому времени достигнуто практикой. П. Л. Чебышев впервые сформулировал задачу как задачу об оптимальном (наилучшем) выборе.

Предварительно необходимо пояснить, как понимать, что кривая  $KLM$  близка к прямой  $GH$ . Ясно, что чем дальше точка  $D$  находится от прямой  $GH$  (расстояние от точки  $D$  до прямой  $GH$  определяется естественным образом. Оно равно длине перпендикуляра, опущенного из точки  $D$  на прямую  $GH$ ), тем больше шток, прикрепляемый к точке  $D$ , отклоняется от прямолинейного движения и тем большему износу подвержены поршень и сальник.

Систему координат можно выбрать так, что прямая  $GH$  будет параллельна вертикальной оси. Тогда уравнение этой прямой имеет вид  $t=d$ , где  $d$ —один из параметров. Пусть  $D$ —произвольная точка на кривой  $KLM$  и ее координата  $t$  имеет вид  $t=f(x, a, b, c)$ , где  $a, b, c$ —три оставшихся параметра, а функция  $f$  описывает положение точки  $D$  в зависимости от  $x$  и параметров параллелограмма.

Тогда математически задачу П. Л. Чебышева можно сформулировать так. Найти

$$\Delta = \min_{-h \leq x \leq h} \max |f(x, a, b, c) - d|, \quad (5)$$

где нижняя грань вычисляется по параметрам  $a, b, c, d$ . Параметры  $a_0, b_0, c_0, d_0$ , на которых достигается минимум

правой части (5), и дают оптимальную конструкцию параллелограмма Уатта.

Собственно, задачу (5) нельзя считать задачей наилучшего приближения функций. В лучшем случае (при фиксированных  $a, b, c$ )—это задача наилучшего равномерного приближения функции константой. В целом задача (5) относится к разряду так называемых минимаксных задач. Точное решение таких задач, вообще говоря, невозможно. В настоящее время разработано значительное количество численных методов решения минимаксных задач. Трудность их решения, в частности, состоит в том, что они имеют, как правило, много локальных экстремумов. Одна из заслуг Чебышева состоит в том, что он еще в середине прошлого века предложил численный метод решения задачи (5), который и привел его к созданию теории наилучших равномерных приближений многочленами.

**IV. Метод Чебышева.** Опишем суть метода, не вдаваясь в детали. Функция  $\varphi(x) = f(x, a, b, c) - d$  разлагается в ряд Тейлора по степеням  $x$ . Параметры  $a, b, c, d$  подбираются так, чтобы наибольшее число первых членов разложения обратилось в нуль. Из соответствующих уравнений находим значения параметров и принимаем их за начальные приближения:  $a_0^0, b_0^0, c_0^0$  и  $d_0^0$ . Для параллелограмма Уатта, имея 4 параметра, можно добиться равенства нулю четырех первых членов разложения, при этом автоматически обращается в нуль и коэффициент при  $x^4$ , коэффициент при  $x^5$  отличен от нуля. Обозначим его  $k_5 = k_5(a_0^0, b_0^0, c_0^0, d_0^0)$ .

В простейшей ситуации можно ограничиться разложением функции  $\varphi(x)$  до 5-й степени включительно. Далее заменяем  $x$  на  $hu$  ( $-1 \leq u \leq 1$ ) и предполагаем, что оптимальные значения разлагаются в ряд по степеням  $h$ , например,  $a_0 = a_0^0 + a_1 h + a_2 h^2 + \dots$ . Коэффициенты  $a_1, a_2, a_3, \dots$  будем называть поправками. Аналогично—для  $b_0, c_0, d_0$ . Сохраняя достаточное число первых членов разложения, подставляем параметры  $a_0, b_0, c_0, d_0$  в разложение функции  $\varphi(hu)$ . Разлагаем коэффициенты при степенях  $u$  по степеням  $h$ , сохраняя члены разложения до 5-й степени включительно, и подбираем поправки так, чтобы в этих разложениях исчезли слагаемые при степенях  $h$  до четвертой включительно. Тогда с точностью до  $h^5$

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &= |\varphi(hu)| = \\ &= \frac{h^5}{5!} k_5(a_0^0, b_0^0, c_0^0, d_0^0) |u^5 - c_0 - c_1 u - c_2 u^2 - c_3 u^3 - c_4 u^4|, \quad (6) \end{aligned}$$

где  $c_i$  зависит от оставшихся неопределенными коэффициентами поправок. Параметрами  $c_i$  распорядимся так, чтобы наибольшее значение по  $u$  ( $-1 \leq u \leq 1$ ) правой части (6) было наименьшим. Из этого условия находим  $c_i$ , а следовательно, и требуемые поправки.

Фактически П. Л. Чебышев в работе [1] не привел конкретных расчетов, непосредственно относящихся к параллелограмму Уатта. Во второй главе этой работы он привел окончательные результаты об оптимальных параметрах параллелограмма Уатта, а в дальнейшем он наметил лишь основные контуры рассуждений. Главное внимание в этой работе он уделил задаче наилучшего равномерного приближения непрерывных функций многочленов.

Это привело к тому, что в последующем ряд исследователей написали целый цикл работ, пытаясь восстановить утверждения П. Л. Чебышева об оптимальных параметрах параллелограмма Уатта. Это не всегда удавалось, и даже высказывались сомнения, были ли соответствующие расчеты проведены П. Л. Чебышевым. Лишь спустя почти 100 лет в [3] было показано, что, следуя основному методу П. Л. Чебышева, а также учитывая специфику изучаемой функции, относящейся к параллелограмму Уатта, и конкретные указания Чебышева, можно в точности вывести все утверждения П. Л. Чебышева об оптимальных параметрах параллелограмма Уатта.

Хорошо известны исследования П. Л. Чебышева в теории чисел, теории вероятностей и приближения функций, в теории интерполирования и интегрирования и ряде других областей. Интересно отметить, что сам П. Л. Чебышев из всех своих исследований наиболее высоко ценил постановку минимаксной задачи. Кроме задач о шарнирных механизмах и теории приближения функций, к этому же кругу относятся рассматривавшиеся им задачи о раскрое тканей, о черчении географических карт и др. Кстати, при решении последней задачи он также опередил свое время почти на 100 лет, по существу, сведя ее к задаче оптимального управления, где нужно было найти цену игры—наилучшее приближение конкретной функции решениями гармонического уравнения, когда управление осуществляется за счет изменения граничных условий.

**V. Наилучшее равномерное приближение непрерывных функций многочленами.** Итак, в связи с решением прикладной задачи об оптимальных параметрах параллело-

грамма Уатта П. Л. Чебышев сформулировал следующую задачу:

Для данной непрерывной на отрезке  $[-h, h]$  функции  $f(x)$  среди многочленов степени не выше  $n$  найти такой  $P_n^*(x)$ , что для любого многочлена  $P_n(x)$  степени не выше  $n$  выполняется неравенство

$$\rho(f, P_n^*) \leq \rho(f, P_n),$$

т. е. требуется указать такой многочлен  $P_n^*(x)$ , равномерное расстояние которого до функции  $f(x)$  не превосходит равномерного расстояния этой функции от любого многочлена степени не выше  $n$ .

При этом многочлен  $P_n^*(x)$  называют многочленом наилучшего равномерного приближения (МНРП). На рис. 10  $P_1^*(x)$  — многочлен наилучшего равномерного приближения первой степени для функции  $\cos x$  на отрезке  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Для функций, аналитических на  $[-h, h]$ , и малых  $h$  П. Л. Чебышев предложил также приближенный способ построения МНРП. Кроме того, для конкретных функций  $f(x) = x^{n+1}$ , тесно связанных с теорией параллелограмма Уатта (см. (6), где  $n=4$ ), он нашел МНРП степени  $n$  в явном виде.

В частности, многочлены  $x^{n+1} - P_n^*(x)$  в дальнейшем получили название многочленов Чебышева первого рода. Они находят широкое применение в теоретической и прикладной математике. Можно отметить, что еще П. Л. Чебышев рекомендовал использовать интерполяционные многочлены с узлами в нулях многочленов Чебышева. Кроме аргументов Чебышева, в дальнейшем появились и дополнительные аргументы в пользу этого факта. Так, например, существуют аналитические функции, для которых последовательность интерполяционных многочленов с равномерными узлами интерполяции не сходится к ним равномерно. В то же время если функция  $f(x)$  имеет ограниченную производную, то последовательность интерполяционных многочленов с узлами интерполяции в нулях многочленов Чебышева сходится к ней равномерно. На самом деле круг таких функций значительно более широк. Однако, как известно, сходимости имеет место не для любой непрерывной функции.

## VI. Основные проблемы теории приближения функций.

В целом задачи, решаемые теорией приближения функций, являются стандартными в тематике экстремальных

задач, хотя и имеют свою специфику. Ограничимся их формулировкой лишь для случая наилучшего равномерного приближения непрерывных функций алгебраическими многочленами.

1. Существование МНРП.

2. Единственность МНРП.

3. Характеристические свойства МНРП, т. е. такие свойства МНРП степени  $n$  для данной непрерывной функции, которые отличают его от всех других многочленов степени не выше  $n$ .

4. Построение (явное нахождение) МНРП.

Последнее возможно лишь в редких случаях, поэтому естественно возникает следующий пункт.

5. Численные (приближенные) методы построения МНРП.

В некоторых прикладных задачах сам многочлен или его коэффициенты имеют физический или технический смысл, поэтому возникает также следующая проблема.

6. Непрерывная зависимость МНРП и его коэффициентов от исходных данных. Точнее, пусть равномерное расстояние между функциями  $f(x)$  и  $g(x)$  мало. Насколько мало будут отличаться а) их МНРП, б) коэффициенты их МНРП.

7. Оценки погрешности приближения.

Речь идет о том, насколько хорошо приближается заданная функция  $f(x)$  многочленами степени не выше  $n$ , т. е. об оценках в зависимости от  $n$  величин

$$E_n(f) = \rho(f, P_n^*),$$

где, как и раньше,  $P_n^*(x)$  — МНРП для функции  $f(x)$ . При этом наряду с оценками для индивидуальных функций часто возникает задача об аналогичных оценках для заданных классов функций, см., например, [4].

Так, пусть  $W^1$  — класс функций, у которых первая производная во всех точках отрезка  $[a, b]$  по абсолютной величине не превосходит единицы. Насколько быстро убывает  $E_n(f)$  в самом неблагоприятном случае; таким образом возникает задача о точном вычислении или оценках величины  $E_n(W^1) = \sup_{f \in W^1} E_n(f)$ .

Важность подобного рода задач (об оценках погрешности) можно проиллюстрировать следующим несколько модифицированным отрывком из книги [5], с. 29.

Физик (Ф) пришел к знакомому математику (М), и между ними состоялся следующий разговор.

**Ф:** Мне нужно приблизить функцию  $\varphi(x)$  многочленами. Что можно сказать о погрешности приближения?

**М:** Сейчас прикинем. Существует такая константа  $C$  и многочлен  $P_n(x)$  степени не выше  $n$ , что для любых  $x$  из  $[0, 1]$  выполняется неравенство

$$|\varphi(x) - P_n(x)| \leq \frac{C}{n+1}.$$

**Ф:** Для приближения с нужной точностью мне нужно выбрать  $n$ . Чему равна константа  $C$  в этом неравенстве?

**М:** Из моих выкладок следует, что  $C$  можно положить равной 200.

**Ф:** Мне нужна точность  $10^{-2}$ . Значит, надо брать полином степени  $2 \cdot 10^4$ . Многовато. Нельзя ли еще уменьшить константу?

**М:** Мои оценки достаточно грубы. Их можно, конечно, улучшить. Да, можно положить  $C = \frac{1}{10}$ , но сколько-нибудь существенно улучшить последнюю константу уже невозможно.

**Ф:** Спасибо за помощь, последняя оценка меня вполне устраивает.

Кроме наилучших приближений в теории приближения функций, широко используются и другие методы: интерполяционные процессы, разложения в ряды Фурье, линейные методы суммирования рядов Фурье и т. д.

В экспериментальных исследованиях важную роль играет следующая задача.

8. Задача восстановления. Функция известна в конечном числе точек. Нужно разработать алгоритм, позволяющий вычислять ее в других точках. У специалистов по разностным методам используется равносильный термин «задача восполнения».

Как правило, восстановление возможно лишь с некоторой погрешностью. При этом необходима некоторая дополнительная информация о восстанавливаемой функции. Характер этой дополнительной информации может быть различным. Например, в некоторых случаях известно, что линейная интерполяция между соседними узлами восстанавливает функцию с известной погрешностью или функция является решением дифференциального уравнения, поэтому она определенное число раз дифференцируема и можно как-то оценить ее старшую производную.



В теории наилучших приближений в настоящее время интенсивно изучаются и более сложные задачи — задачи наилучшего приближения при дополнительных ограничениях на аппроксимирующую функцию. Например, требования совпадения приближаемой и приближающей функций в заданном наборе точек, приближение с сохранением свойства выпуклости или монотонности, кусочной монотонности приближаемой функции и т. д.

Отметим еще, что при аппроксимации функций многих переменных для сложных областей автоматически возникают две задачи — аппроксимация функции и аппроксимация области. Последнюю также часто требуется аппроксимировать с сохранением определенных свойств, например выпуклые области аппроксимировать выпуклыми.

При решении конкретной задачи аппроксимации обычно возникают следующие вопросы: как выбрать то или иное расстояние между функциями? Из каких условий при этом исходить? Чем приближать? Как построить многочлен (или какую-то другую функцию из заданного класса функций) наилучшего приближения? Как оценить погрешность аппроксимации?

**VII. Выбор расстояния.** Выбор расстояния между функциями часто диктуется условиями задачи. Например, пользователю той или иной ЭВМ бывает важно знать, с какой точностью считается функция  $\cos x$  для произвольного  $x$ . Поэтому разработчик подпрограммы вычисления  $\cos x$  должен обеспечить, чтобы ошибка не превосходила заданной величины, например  $10^{-10}$ , в любой точке  $x$ . Таким образом, непосредственно из условий задачи однозначно определяется метрика — это равномерная метрика  $\rho(f, g)$ . Можно заметить, что равномерная метрика берется всякий раз, когда хорошую точность нужно гарантировать во всех точках.

Вообще выбор расстояния — не простая задача. При этом часто берется во внимание и простота построения аппроксимирующей (приближающей) функции.

Приведем ситуацию, когда выбор равномерной метрики нецелесообразен. Пусть изучается некоторый процесс, на который на небольших промежутках времени накладываются значительные «шумы», т. е. имеется некоторая функция, значения которой на малых промежутках изменения переменной заметно искажены, т. е. известны с большой погрешностью. В этом случае выбирать равномерную метрику для аппроксимации нецелесообразно, так как МНРП

будет «отслеживать» эти «шумы» и плохо аппроксимировать функцию и в тех точках, где она задана точно. В этом случае лучше выбирать среднеквадратическую метрику  $\rho_i$ . Многочлен наилучшего среднеквадратического приближения меньше зависит от таких «шумов».

Пример. Пусть радиопередатчик, находящийся в горах, передает сведения о температуре с автоматической метеостанции. При этом предположим, что изредка происходят искажения, поэтому в малый промежуток времени передается серия измерений. Эти измерения мы можем интерпретировать как значения функции  $T(t)$  в моменты  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , т.е. нам известны  $T(t_i)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ). Пусть  $n=10$  и  $T(t_1)=10$ ,  $T(t_2)=12$ ,  $T(t_i)=10$  ( $i=3, 4, \dots, 10$ ). Так как по условию промежуток мал, то можно считать, что истинная температура была постоянной. Какую же из этих температур принять за температуру в горах?

Будем рассматривать эту задачу как задачу теории приближения. Так как истинная температура постоянна, то функцию  $T(t)$  будем приближать константой  $T$ . В случае равномерной метрики константа  $T$  находится из условий

$$\min_T \max_{1 \leq i \leq 10} |T(t_i) - T| = \max_{1 \leq i \leq 10} |T(t_i) - T^*|.$$

Ясно, что в этом случае наилучшая константа  $T^*=11$ . Анализируя наши данные, мы сразу заметим, что результат плох.

В случае среднеквадратического приближения наилучшая константа  $T^{**}$  находится из условий

$$\min_T \sum_{i=1}^{10} [T(t_i) - T]^2 = \sum_{i=1}^{10} [T(t_i) - T^{**}]^2.$$

Выписывая условие минимума, находим  $T^{**} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} T(t_i) = 10,2$ . Ясно, что этот результат значительно ближе к истине.

**VIII. Выбор приближающего класса функций.** Здесь кратко обсуждается вопрос о том, чем приближать. Итак, нам нужно заменить сложную, возможно, даже не вычисленную функцию более простой. Из какого множества выбирать эти более простые функции?

Можно предъявить некоторые общие требования к приближающему множеству функций:

1) функции из этого множества должны легко вычисляться, например, на ЭВМ;

2) обеспечивать возможность достижения требуемой точности при аппроксимации.

Простейшим из таких множеств является уже упоминавшееся множество алгебраических многочленов степени не выше  $n$ . Обозначим это множество  $P_n$ .

Так, в первых ЭВМ для вычисления элементарных функций использовалась аппроксимация (приближение) многочленами. А после разработки алгоритмов и программ аппроксимации дробно рациональными функциями  $r_{m,k}(x)$  порядка  $m, k$  ( $r_{m,k}(x) = P_m(x)/Q_k(x)$ ,  $P_m(x) \in P_m$ ,  $Q_k(x) \in P_k$ ) для аппроксимации элементарных функций стали применять дробно рациональные функции. Это произошло потому, что при той же точности аппроксимация рациональными дробями требует существенно меньшего числа параметров (коэффициенты полиномов  $P_m(x)$  и  $Q_k(x)$ ), чем аппроксимация многочленами. Это приводит к существенному выигрышу во времени счета.

В теоретических исследованиях и приложениях, особенно в рентгеноструктурном анализе, часто используются аппроксимирующие агрегаты вида

$$\sum_{i=1}^n c_i e^{\alpha_i x}.$$

Здесь следует различать два случая:

1)  $\alpha_i$  фиксированы, а при аппроксимации наилучшим образом подбираются лишь коэффициенты  $c_i$ ;

2) варьируются  $\alpha_i$  и  $c_i$ .

Второй случай является более сложным. Не всегда существует наилучшая приближающая функция. В случае существования может нарушаться единственность, т.е. могут существовать две и более наилучшим образом аппроксимирующие функции.

При аппроксимации периодических функций часто используются тригонометрические полиномы порядка  $n$

$$t_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

В последние десятилетия широкое распространение получили кусочно полиномиальные аппроксимирующие агрегаты, или сплайны. При определении сплайнов на основном отрезке  $[a, b]$  выбираются узлы  $a_0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Тогда сплайном степени  $k$  называется функция, которая на отрезках  $[x_i, x_{i+1}]$  совпадает с полино-

мами степени не выше  $k$ . На эти полиномы иногда накладываются дополнительные ограничения. Например, совпадение их значений в общем узле, совпадение их значений и значений их производных до  $s$ -го порядка в общем узле,  $s \leq k$ . В первом случае обеспечивается непрерывность сплайна на отрезке  $[a, b]$ , во втором — его непрерывность на отрезке  $[a, b]$  вместе с производными до  $s$ -го порядка включительно. В последнем случае говорят, что во всех узлах имеет место гладкость  $s$ -го порядка. Применяются также сплайны с различной гладкостью в различных узлах.

Сплайны являются достаточно гибкими и универсальными аппроксимирующими агрегатами и по этой причине широко используются, например, в машинной графике. В качестве иллюстрации их возможностей для машинной графики желающие могут посмотреть книгу [6], где приведен портрет девушки анфас и его машинный вариант, нарисованный с помощью кубического (степени 3) сплайна с 16 узлами. Ясно, что в некоторых узлах сплайн склеен достаточно гладко, в других (ресницы) — первая производная должна терпеть разрыв.

Соответствующие аналоги приведенных классов функций имеются и для функций многих переменных. Следует также отметить, что наше перечисление ни в коей мере не исчерпывает всех возможных аппроксимирующих классов функций. Сюда можно было отнести различные обобщения сплайнов, а также комбинации логарифмов, арктангенсов, радикалов и других элементарных функций, которые можно отнести к легко вычислимым, так как в ЭВМ есть стандартные подпрограммы их вычисления. При переходе к мини-ЭВМ круг возможных претендентов на приближающие множества может существенно сужаться.

В целом выбор аппроксимирующего множества — не простая задача, иногда выбор диктуется непосредственно условиями задачи. Обсудить детально этот вопрос в популярной заметке нет возможности, поэтому я ограничусь юмористическим примером.

Два вундеркинда Петя и Саша изобрели звездолет и вскоре оказались на другой планете. Планета им не очень понравилась, они вспомнили Землю, друзей и решили вернуться. Однако по рассеянности кто-то из них забыл перекрыть бак с топливом, и оно улетучилось. Но мальчики не унывали. Вспомнив свою прогулку, а также кое-что из прочитанного, они разработали способ приготовления топлива из местного сырья.

Для расчета потребностей в топливе мальчикам необходимо было определить  $a$  — ускорение свободного падения на планете. Прихватив рулетку и секундомер, они принялись за эксперимент. Петя с различных высот опускал камень, Саша измерял время падения. В итоге были найдены  $s(t_i)$  — высота падения,  $t_i$  — время падения,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $n$  — число испытаний.

В силу погрешности измерений точно удовлетворить нужным соотношениям они не могли. Однако юные космонавты перед полетом читали популярную книгу по теории приближения функций и решили воспользоваться своими знаниями. Чем приближать, им было ясно, так как они знали закон свободного падения  $s(t) = \frac{at^2}{2}$ . Возник вопрос, как приближать. Петя предложил подобрать  $a$  так, чтобы модуль наибольшего отклонения  $\max_{1 \leq i \leq n} \left| s(t_i) - \frac{at_i^2}{2} \right|$  стал наименьшим. Саша напомнил, что в этом случае алгоритм нахождения  $a$  является итерационным и, хотя для функций, определенных на конечном множестве точек, число итераций конечно, вычислений будет много. Он предложил найти  $a$  из условия минимума выражения

$$J(a) = \sum_{i=1}^n \left[ s(t_i) - \frac{at_i^2}{2} \right]^2.$$

Из условия минимума  $\frac{dJ}{da} = 0$  они нашли  $a = 2 \sum_{i=1}^n s(t_i) t_i^2 / \sum_{i=1}^n t_i^4$ , провели дальнейшие расчеты, изготовили топливо и благополучно вернулись на Землю.

Из этого простого примера видно, что выбор аппроксимирующего множества может определяться условиями задачи.

**IX. Приложения теории приближений функций.** Круг приложений теории приближения функций достаточно широк, и обсудить все возможные аспекты ее применения не представляется возможным. Известный математик В. Н. Страхов на одной из своих публичных лекций сказал, что практически все прикладные задачи — это задачи теории приближения функций. Конечно, эту фразу не надо понимать буквально, он имел в виду, что в конце концов такие задачи сводятся к нахождению функции

(функций), достаточно хорошо описывающей процесс и легко вычислимой. Способы нахождения таких функций специфичны для различных разделов математики — разностные методы решения уравнений в частных производных, численные методы минимизации функционалов и т. д.

Пожалуй, в первую очередь к числу приложений ТПФ следует отнести разработку методов аппроксимации различных часто используемых, но не вычислимых или трудно вычислимых специальных и элементарных функций, таких, как интегральный синус, функции Бесселя, тригонометрические и обратные тригонометрические функции, логарифмическая и показательная функции и т. д.

Важную роль играют методы ТПФ при экономном запоминании и переработке больших массивов информации, иначе — больших массивов таблично заданных функций. В качестве простейшего примера можно напомнить, что раньше для вычисления  $\cos x$  применялись большие таблицы этой функции, сейчас в ЭВМ эти таблицы очень экономно заменены, как уже упоминалось выше, рациональной дробью.

К сфере ТПФ относятся и задачи восстановления, которые часто возникают в различных прикладных науках: метеорологии, геологии, топографии и т. д. Как мы уже говорили, суть задачи восстановления состоит в том, что функция известна на некотором множестве точек или, например, известны ее сечения (в многомерном случае) и нужно разработать алгоритм приближенного вычисления функции на более широком множестве точек.

Часто задачи восстановления решают с помощью интерполяционных методов.

Например, пусть в одномерном случае в  $n$  различных точках отрезка  $[a, b]$  задано  $n$  значений  $f(x_j)$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) функции  $f(x)$ . Часто применяется следующий процесс восстановления. Выбирают некоторый набор функций  $\varphi_i(x)$  (например,  $\varphi_i(x) = x^{i-1}$ ) ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), коэффициенты  $c_i$  находят из условий

$$\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x_j) = f(x_j) \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

и считают, что функция  $\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x)$  и решает задачу восстановления.

При этом возникают те же проблемы, что и перечисленные в п. VI для наилучших равномерных приближений.

Кроме того, важной является задача об оптимальном восстановлении, например об оптимальном выборе функций  $\varphi_i(x)$ , гарантирующем наименьшую погрешность восстановления на заданном классе функций. С задачей восстановления тесно связана следующая задача, которую можно назвать задачей кодирования.

Некоторый объект передает информацию о функциях из некоторого класса. Функции, входящие в класс, могут быть сложными, поэтому передача полной информации о них невозможна. Пусть передаются лишь значения функции в узлах  $x_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ). Как задать эти узлы, чтобы объект, принимающий информацию, мог восстановить значения функции на отрезке  $[a, b]$  с наименьшей возможной погрешностью?

Принципиальное отличие этих двух задач в том, что, кроме априорной информации (функция принадлежит заданному классу), в первом случае мы знаем ее значения лишь в фиксированных узлах  $\{x_j\}$ , другие ее значения нам неизвестны. Во втором случае значения функции известны во всех точках отрезка  $[a, b]$ , и мы выбираем узлы  $\{x_j\}_{j=1}^n$  таким образом, чтобы погрешность оптимального восстановления функций из класса по их значениям в выбранных  $n$ -узлах была меньше (не больше в случае неединственного выбора), чем погрешность оптимального восстановления по значениям функций по другим  $n$ -узлам.

Задачи восстановления решаются и при другой возможной информации, например, восстановление функций по ее первым  $n$ -коэффициентам ряда Фурье и т. д.

Можно привести ряд практических задач, когда невозможен специальный выбор узлов. Например, в эксплуатируемом нефтеносном районе мы знаем по действующим и действовавшим скважинам глубину залегания нефтеносных пластов. Требуется спрогнозировать глубину залегания нефтеносных пластов в тех местах, где нет скважин. Возникает типичная задача восстановления. Аналогичные проблемы возникают в метеорологии, топографии, при интерпретации различных геофизических экспериментальных данных и т. д.

Велика роль ТПФ при разработке методов машинной графики, т. е. разработке методов аналитического описания поверхностей различных предметов (автомашина, самолет, деталь, вытачиваемая на станке, и т. д.), их сечений, различных проекций и т. п. Необходимость подобных задач возникает, например, при изготовлении чертежей с помощью

ЭВМ, при изготовлении различных деталей на станках с числовым программным управлением, при автоматическом раскрое заготовок в обувной и швейной промышленности и т. д.

С использованием машинной графики можно, например, описать с помощью ЭВМ фильм и посмотреть из различных положений на внешний вид автомобиля новой марки, находящегося в стадии разработки.

В последние десятилетия в ТПФ и машинной графике для приближенного представления функций (кривых и поверхностей) широко используются аппроксимации кусочно-полиномиальными функциями (сплайнами) одного и многих переменных. При этом в зависимости от задачи и желательной простоты алгоритма применяются кусочно-полиномиальные аппроксимации с различными требованиями гладкости в местах стыковки полиномов.

Подобные аппроксимации используются как вспомогательные и в других областях математики при решении различных теоретических и прикладных задач.

Например, прикладная задача сводится к решению уравнения в частных производных, последняя решается разностным методом, а затем методы ТПФ применяются для приближенного восстановления (восполнения) решения с сетки на всю область.

Разработанные в ТПФ методы оценок погрешности аппроксимации различных классов функций кусочно-полиномиальными функциями применяются, например, при выводе оценок погрешности приближенного решения уравнения в частных производных, полученного с помощью метода конечных элементов (МКЭ).

МКЭ широко используется при расчетах различных конструкций и сооружений на прочность, например, самолетов, кораблей, стадионов, плотин, прокатных станков, трубопроводов и т. д.

Цель подобных расчетов состоит в том, чтобы с помощью математической модели и расчетов на ЭВМ выбрать наиболее подходящий вариант.

Суть метода заключается в том, что конструкция разбивается на части, предполагается, что каждая из частей меняется по простому закону (обычно предполагают, что эти изменения хорошо описываются полиномом невысокой «степени», например, от первой до пятой) и, используя различные вариационные принципы, такие, как принцип минимума потенциальной энергии, находят коэффициенты



этих полиномов. Наряду с другими достоинствами МКЭ хорош еще и тем, что в отличие от конечно-разностного метода он дает приближенное решение сразу во всей области.

На примере МКЭ хорошо можно проиллюстрировать пользу предварительных математических расчетов. Многие телезрители хорошо помнят Олимпийские игры в Мюнхене и, наверное, обратили внимание на мюнхенский крытый стадион, на котором и после Олимпийских игр неоднократно с блеском выступали наши гимнастки. Этот огромный крытый стадион примечателен тем, что внутри нет никаких опор, поддерживающих крышу, она опирается лишь на стены стадиона.

В одной из книг [7] по МКЭ описана следующая история. При проектировании мюнхенский стадион был рассчитан на прочность с помощью МКЭ. Через четыре года Олимпийские игры проводились в Монреале, и там тоже решили построить аналогичный стадион. При этом стройку начали сразу без существенных предварительных расчетов, но из-за недостатка средств закончить строительство стадиона к открытию Олимпийских игр не успели. Уже после окончания Олимпиады было решено закончить строительство, предварительно проведя необходимые расчеты. Как говорят, подсчитали, прослезилась. Оказалось, что стены не выдержали бы нагрузки и крыша, если бы была сооружена, могла обрушиться.

Как следует из опубликованной в журнале «За рубежом» [8] перепечатки из одной иностранной газеты, у последней истории было поучительное продолжение. Крышу было предложено подвесить на кронштейн из прочного металла, чтобы снять часть нагрузки на стены. Кронштейн был заказан в одной из европейских стран, и когда его уже подвозили к берегам Канады, кто-то вспомнил, что расчеты проводились летом, а зимой в Канаде бывает много снега и дуют сильные ветры, что создает существенные дополнительные нагрузки. Пришлось пересчитывать снова, и результат вновь оказался плачевным — кронштейн не помогал.

Бурное развитие науки и техники приводит к созданию принципиально новой технологии даже в традиционных областях деятельности человека.

Так, развитие теории приближения сплайнами, лазерной техники, микроэлектроники и машиностроения привело

к созданию новой технологии в такой традиционной области, как швейная промышленность.

Вполне реальной и в основном уже действующей является следующая ситуация, которая лет 20 назад могла представляться фантастической.

Вы решили сшить себе костюм (платье) и заходите в ателье. Там вас вежливо встречает робот, снимает необходимые размеры, затем предлагает сесть перед экраном телевизора и выбрать наиболее подходящую для вас модель.

Через несколько минут вы видите себя прогуливающимся на экране телевизора в новом костюме, затем во втором, . . . , пятом. Выбираете наиболее понравившуюся вам модель. Затем робот сообщает, что заказ будет выполнен через час и при желании можно подождать в соседнем зале, где есть книги, журналы и т. д. Вы несколько удивлены и выражаете желание посмотреть, как будет производиться пошив костюма. Вам предлагают пройти в соседнюю комнату и включить телевизор.

Вскоре вы видите на экране длинный стол с каким-то сооружением на одном конце. На столе появляется материал, и над столом появляется «каретка», с помощью которой осуществляется раскрой тканей. Вы выясняете, что кривые запоминаются в ЭВМ с помощью сплайнов — кусочно-полиномиальных функций, а сам раскрой осуществляется с помощью луча лазера. В общем, через час вы выходите в новом костюме.

Выше уже отмечалось, что методы ТПФ широко используются при обработке экспериментальных данных. При этом следует иметь в виду, что эти данные, как правило, содержат ошибки измерений, то есть изучаемый процесс известен с погрешностью. Поэтому в ТПФ разрабатываются (см., например, [9], [10], [11]) различные методы сглаживания (исправления) экспериментальных данных. В некоторых из этих методов экстремальными решениями являются сплайны — гладкие кусочно-полиномиальные функции.

Нередко по экстремальным данным, известным с погрешностью, необходимо определить скорость изменения процесса, т. е. необходимо вычислять производные. Для этих целей можно использовать сглаженные данные, т. е. для вычисления производной дифференцируете соответствующий сглаживающий сплайн. При этом следует иметь в виду, что если данных очень много, то за счет погрешности вычислений на ЭВМ сглаживающий сплайн может не обладать эффектом сглаживания. В этом случае

следует разумно уменьшить (разрядить) количество экспериментальных данных, т. е. не учитывать некоторых из измерений.

Можно использовать также теорию наилучшего численного дифференцирования при информации, известной с погрешностью, [12], [13], тесно связанную с теорией некорректных задач [14], [15].

**XI. Диалог инженера (И) и математика (П) при обсуждении прикладной задачи.**

Здесь мы хотим привести пример того, как иногда нетривиально прикладная задача сводится к задаче ТПФ [16].

**И.** В связи с неразрушающими методами контроля нас интересует функция, характеризующая прочность изделия. Она зависит от конечного числа переменных, и нам известны ее значения в конечном числе точек. Как можно точно или приближенно определить ее значения в других точках? Какие существуют методы решения подобных задач?

**П.** В ТПФ разработан большой набор подобных методов, и мы можем помочь выбрать наиболее подходящий из них, если задача будет сформулирована более конкретно.

**И.** У нас функция зависит от 15 переменных, и известны ее значения в 25 точках.

**П.** Наиболее часто рассматриваются следующие два типа задач:

а) значений функции много, и уже линейная интерполяция между соседними значениями позволяет восстановить функцию с требуемой точностью, но нужно построить более экономный метод восстановления, т. е. построить функцию, зависящую от небольшого числа параметров (значительно меньшего, чем число данных), которая обеспечивает требуемую точность;

б) таблица данных не столь детальна, но о функции известна дополнительная информация. Например, известно, что она определенное число раз дифференцируема, и известны некоторые оценки производных.

Нет ли у вас подобной информации?

**И.** Нет.

**П.** Представьте, как можно восстановить функцию одного переменного на отрезке  $[0, 1]$  по двум ее значениям, если о ней больше ничего не известно. Это можно было бы сделать, если знать, что она мало отличается от линейной или другой конкретной функции, зависящей

от двух параметров. Может, вам известен специальный вид этой функции?

**И.** Подобной информации у нас тоже нет.

**П.** Может, ваша функция является решением дифференциального уравнения?

**И.** Никаких точных закономерностей мы не знаем, физика этого процесса не изучена.

Казалось, разговор зашел в тупик. Тем не менее задача представлялась П. интересной и важной, и обсуждение продолжалось.

**П.** Еще задолго до разработки математических методов и применения ЭВМ опытные кардиологи неплохо умели по кардиограмме ставить диагноз, основанный на качественном анализе кардиограмм. Вероятно, у вас тоже есть эвристические (качественные) соображения, на основании которых можно судить о прочности изделия?

**И.** Да, конечно. Можно сформулировать 5—6 таких принципов.

Точки соприкосновения были найдены, и сотрудничество началось. На основании эмпирических данных были введены новые переменные. Их было значительно меньше. С помощью корреляционного анализа была выявлена их связь с прочностью. Те из переменных, которые слабо коррелировали с прочностью, были отброшены. При дальнейшем анализе экспериментальных данных выяснилась примерно экспоненциальная зависимость прочности от оставшихся переменных. В более сложной модели таких переменных было 4, в более простой — даже 2, хотя и она оказалась достаточно удовлетворительной. Таким образом, задача свелась к приближению экспериментальных данных линейной комбинацией четырех (двух) экспонент с нефиксированными показателями. Неизвестные параметры были найдены на основе методов ТПФ.

**XII. Ответственность за модель.** Если инженерная модель обоснована и применяются обоснованные математические методы, то надежность окончательного результата гарантирована.

Сложнее обстоит дело, когда модель построена на эвристических соображениях, подтвержденных небольшим числом экспериментальных данных. В этом случае необходим постоянный контроль в процессе эксплуатации модели, в сомнительных случаях желательно привлекать другие методы для сравнения результатов. Модель следует

корректировать по мере накопления экспериментальных данных или новых теоретических результатов.

Так, в процессе эксплуатации указанной выше модели по предсказанию прочности изделий было проведено около 20 новых испытаний. В двух случаях результат, предсказываемый на основании разработанной модели, заметно отличался от реальной прочности этих изделий, т. е. погрешность предсказания выходила за рамки допустимой. На основании новых экспериментальных данных параметры модели были уточнены, и новая модель (изменены параметры) вполне удовлетворительно описывала имеющиеся экспериментальные данные. В процессе изучения и уточнения модели, конечно, важно понять физическую роль параметров, входящих в математическую модель.

Мне представляется, что математические модели, основанные на эвристических соображениях инженеров, полезны, так как освобождают их от рутинной работы (рутинных расчетов) и позволяют большее внимание обратить на сомнительные случаи, привлекая для их анализа другие возможные модели и методы.

Нередко возникает вопрос о том, кто несет персональную ответственность за модель, точнее, за ее соответствие реальному процессу: математик, инженер, оба и т. д. Вопрос, конечно, не простой. Ему посвящена достаточно обширная специальная и философская литература. Я не собираюсь сколько-нибудь серьезно обсуждать эту проблему. Конечно, в первую очередь ответственность несет специалист той отрасли, где модель будет использоваться, во вторую — математик за хорошее соответствие математической модели инженерной или физической, а в целом, конечно, оба. Это банально. В определенном смысле вопрос об ответственности является надуманным. Достаточно задать контрвопрос: «Кто несет ответственность за реальный процесс в случае отсутствия какой-либо его модели?» Разработка модели — первый шаг к научному познанию процесса.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Чебышев П. Л. Теория механизмов, известных под названием параллелограммов. — Полн. собр. соч., т. 2. — М. — Л., 1947.
2. Чебышев П. Л. О некотором видоизменении коленчатого параллелограмма Уатта. — Полн. собр. соч., т. 4. — М. — Л., 1947.
3. Гусак А. А. Теория приближения функций. — Минск: Изд-во Белорусского гос. ун-та, 1972.

4. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения.— М.: Наука, 1976.
5. Де Брейн Н. Г. Асимптотические методы в анализе.— М.: Изд-во иностранной литературы, 1961.
6. Rice J. R. The approximation of function.— Reading: Addison—Wesley, 1969.— Vol. 2.
7. Internationale Conference on Finite Elements in Nonlinear Mechanics.— ISD, Stuttgart, 1978.
8. За рубежом, 1978. № 38.
9. Лоран П.—Ж., Аппроксимация и оптимизация.— М.: Мир, 1975.
10. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошников В. Л. Методы сплайн-функций.— М.: Наука, 1980.
11. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплаины в вычислительной математике.— М.: Наука, 1976.
12. Арестов В. В. О равномерной регуляризации задачи вычисления значений оператора.— Матем. заметки, 1977. Т. 22.— № 2.— С. 231—244.
13. Габушин В. Н. Оптимальные методы вычисления значений оператора  $U(x)$ , если  $x$  задано с погрешностью. Дифференцирование функций, определенных с погрешностью.— Тр. МИАН СССР, 1980.— Т. 145,— С. 63—78.
14. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1974.
15. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения.— М.: Наука, 1978.
16. Шостак А. М., Марченков Н. А., Бердышев В. И., Пацко Н. Л. Разработка алгоритма многопараметрового акустико-эмиссионного прогнозирования прочности нагруженных конструкций. Дефектоскопия.— Свердловск, Наука. 1983.— Т. 6.— С. 88—92.

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие . . . . .	3
Ю. С. О с и п о в, член-корреспондент АН СССР Задачи динамического восстановления . . . . .	7
И. И. Е р е м и н, доктор физико-математических наук Противоречивые модели производственного планирования	28
Вл. Д. М а з у р о в, доктор физико-математических наук Формальное и неформальное в математическом моделиро- вании задач планирования и диагностики . . . . .	54
А. Ф. С и д о р о в, доктор физико-математических наук Аналитические методы математической физики и матема- тический эксперимент . . . . .	75
Ю. Н. С у б б о т и н, доктор физико-математических наук Численные методы приближения функций и математи- ческий эксперимент . . . . .	101

## ЧИСЛО И МЫСЛЬ

Сборник. Выпуск 10

Составитель З. С. Другалева

Главный отраслевой редактор А. Нелюбов

Редактор Н. Феоктистова

Младший редактор Н. Карячкина

Художник И. Огурцов

Художественный редактор М. Бабичева

Технический редактор А. Красавина

Корректор Н. Мелешкина

ИБ № 8483

Сдано в набор 17.11.86. Подписано к печати 05.03.87. А07879. Формат бумаги 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>. Бумага книжно-журнальная. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 6,72. Усл. кр.-отт. 7,14. Уч.-изд. л. 6,72. Тираж 32 000 экз. Заказ 6-3627. Цена 35 коп. Издательство «Знание». 101835, ГСП, Москва, Центр, проезд Серова, д. 4. Индекс заказа 876111. Отпечатано с матриц МПО «Первой Образцовой типографии» им. А. А. Жданова на Головном предприятии республиканского производственного объединения «Полиграфкинг». 252057, Киев-57, ул. Довженко, 3.